# Autoevaluación

## Ejercicios

Los ejercicios incluidos al final de cada sección son una buena manera de saber si se han entendido los contenidos.

## Trabajo

La principal tarea de autoevaluación es la elaboración de un trabajo de cierto nivel de dificultad sobre algún tema no tratado en el curso. Se espera que el estudiante comprenda perfectamente el modelo elegido. Se aconseja una extensión de unas veinte páginas.

El tema es libre. Al final de cada sección de los apuntes se encuentran las siguientes sugerencias:

- Historia del Cálculo de Variaciones (la contribución de cada autor y problemas de la Física-Matemática de los que surgió).
- Formulación de las ecuaciones básicas de la relatividad general a partir del Cálculo de Variaciones (sólo aconsejable si se tienen conocimientos sólidos de Geometría).
- Algoritmos de ordenación y búsqueda y sus aplicaciones.
- El átomo de hidrógeno.
- Principios variacionales en Mecánica y sus aplicaciones.
- Elementos finitos en ingeniería.
- El teorema de Noether en Mecánica y Teoría de Campos.
- Mecánica Celeste.
- Aplicaciones de la Teoría de Grafos.
- Grupos cristalográficos planos (mosaicos de la Alhambra).
- Estudio detallado del movimiento giroscópico.
- El concepto matemático de estabilidad en problemas de Física y otras ciencias.
- Sistemas dinámicos.
- Algoritmos de primalidad y factorización y sus aplicaciones en criptografía.

- Funcionamiento de las centralitas telefónicas y distribución de las llamadas en los teléfonos móviles.
- Estudio matemático de los fenómenos relacionados con la tensión superficial.
- Los eclipses.
- Termodinámica.
- Ecuaciones de la combustión.
- Análisis Funcional y Teoría de Distribuciones en Mecánica Cuántica.
- Compresión fractal de imágenes y otros métodos de compresión.
- Tratamiento y análisis de señales.
- El principio de incertidumbre
- Prospecciones geológicas.
- Difracción.
- Comentario paso a paso del famoso artículo de Einstein en 1905 sobre la relatividad especial.
- La ecuación de Dirac y otras ecuaciones de la Física Cuántica (sólo aconsejable si se tienen conocimientos previos de Física).
- Circuitos electrónicos.
- Aplicaciones de la Teoría de Grupos.
- Sistemas lineales con matrices dispersas. Métodos y aplicaciones.
- Propagación de enfermedades y epidemias.
- Principios de Resonancia Magnética Nuclear.
- Uso de la Estadística en ensayos clínicos.
- El teorema ergódico y sus aplicaciones.
- Interpretación de Copenhague de la Mecánica Cuántica.
- Teoría de Juegos y sus aplicaciones.
- Modelos del tráfico.
- Teoría de Colas y sus aplicaciones.
- Generación de números aleatorios.
- Procesos de difusión en Matemática Financiera.
- Relación entre el movimiento browniano y el número de Avogadro (puede ser interesante indagar en los errores teóricos y prácticos que llevaron a Einstein a deducir en su tesis que el número de Avogadro era aproximadamente $2{,}1 \cdot 10^{23}$ mientras que el valor real es casi el triple).
- Mecánica Estadística.
- Ecuaciones diferenciales estocásticas.
- Métodos matemáticos en Astrofísica.
- Ondas en fluidos.

- Las funciones de Bessel y sus aplicaciones.
- Aplicaciones de la Variable Compleja en Física.
- Econometría.
- El movimiento de las olas.
- Resistencia del aire, ley de Stokes.
- Modelos de circulación de la sangre.
- Geometría proyectiva y visión artificial.

## Pruebas generales

Hay dos pruebas parciales (con dos modelos) y dos pruebas finales (la segunda diseñada originalmente para los que no superaran la primera), todas ellas a responder con espacio limitado. Su enunciados se incluyen a continuación y también en ficheros separados

## Primera prueba parcial de autoevaluación. Modelo A

**1)** Explique en pocas palabras el tema y los objetivos previstos en su trabajo.

**2)** Escriba acerca de uno de los siguientes temas: *a)* El principio de Hamilton. *b)* La deducción de la ecuación del calor.

**3)** Escribir las ecuaciones del Euler-Lagrange que sirven para hallar la gráfica $C^2$ de menor longitud uniendo $(0,0)$ con $(1,1)$, y calcular su solución.

**4)** Sabiendo que la velocidad angular $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ satisface las ecuaciones

$$I_1\omega_1' = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \quad I_2\omega_2' = (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 \quad I_3\omega_3' = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2,$$

demostrar que $I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2$ se conserva a lo largo del tiempo.

**5)** Si $\sum a_n e(nx)$ es el desarrollo de Fourier de una función par, ¿son los $a_n$ siempre reales?

## Primera prueba parcial de autoevaluación. Modelo B

**1)** Explique en pocas palabras el tema y los objetivos previstos en su trabajo.

**2)** Escriba acerca de uno de los siguientes temas: *a)* La braquistocrona. *b)* Las series de Fourier en la ecuación del calor.

**3)** Si en cierto sistema mecánico en el que usan las coordenadas $r$, $\theta$ y $\phi$, el lagrangiano es $L = (r')^2 + r^2(\theta')^2 + (1+r)(\phi')^2 + r^6$, hallar dos cantidades que se conserven (permanecen constantes) a lo largo del movimiento.

**4)** La solución de la ecuación del calor en la recta real con $u(x,0) = f(x)$ suficientemente regular es $u(x,t) = (4\pi t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4t)} f(y)\ dy$. Explicar dónde está el fallo en el razonamiento: $\lim_{t\to 0^+} t^{-1/2} e^{-\alpha/t} = 0\ \forall \alpha > 0 \Rightarrow \lim_{t\to 0^+} u(x,t) = 0 \Rightarrow f \equiv 0$.

**5)** Explicar por qué cuando se emplea una base que depende de $t$, la derivada del vector $(x(t), y(t), z(t))$ no es, en general, $(x'(t), y'(t), z'(t))$.

## Segunda prueba parcial de autoevaluación. Modelo A

**1)** Enuncie (y explique muy brevemente) un resultado matemático empleado en su trabajo (o resuma algún tipo de técnicas matemáticas empleadas)

**2)** Escriba acerca de <u>uno</u> de los siguientes temas: *a)* Modelos de difusión (movimiento browniano). *b)* Bases del formato JPEG.

**3)** Si $\vec{v}(\vec{x},t)$ es el campo de velocidades de un fluido, deducir la fórmula para el campo de aceleraciones.

**4)** Explicar el significado de la ecuación de Maxwell $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\vec{E}$.

**5)** Si lanzamos 6400 veces una moneda, ¿cómo aproximaría la probabilidad de que la diferencia entre el número de caras y cruces sea mayor que 100?

**6)** Hallar la transformada de Radon $P_\theta(t)$ (transformada de rayos X) para $\theta = 0$ y $\theta = \pi/4$, cuando la muestra es el triángulo $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \ : \ x + y < 1\}$ de densidad uno.

## Segunda prueba de parcial autoevaluación. Modelo B

**1)** Enuncie (y explique muy brevemente) un resultado matemático empleado en su trabajo (o resuma algún tipo de técnicas matemáticas empleadas)

**2)** Escriba acerca de uno de los siguientes temas: *a)* Significado y aplicaciones del teorema central del límite. *b)* Reconstrucción algebraica en tomografía.

**3)** Si analizamos una imagen $f$ como $f = \sum \lambda_{kl}\phi_{kl}$ con $\phi_{kl}$ ortogonales (no necesariamente las del JPEG), ¿cuál es la fórmula general para los $\lambda_{kl}$?

**4)** Explicar por qué en el modelo discretizado de los procesos de difusión se impone $p(x_n, t_{k+1}) = (p(x_{n-1}, t_k) + p(x_{n+1}, t_k))/2$, donde $p(x_n, t_k)$ es la densidad de partículas en el punto $x_n$ y tiempo $t_k$.

**5)** Hallar la transformada de Radon $P_\theta(t)$ (transformada de rayos X) para la muestra dada por la corona $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ de densidad uno.

**6)** Si $\vec{v}(\vec{x},t)$ es el campo de velocidades de un fluido, deducir la fórmula para el campo de aceleraciones.

## Primera prueba final de autoevaluación

**1)** Explique en pocas palabras el tema y los objetivos previstos en su trabajo.

**2)** Escriba acerca de uno de los siguientes temas: *a)* La braquistocrona. *b)* La deducción de la ecuación del calor.

**3)** Indicar razonadamente el número de grados de libertad del sistema formado por dos partículas que se mueven en $\mathbb{R}^2$ unidas por una barra inextensible de longitud 1.

**4)** Explicar por qué cuando un patinador artístico quiere girar más deprisa, pega los brazos al cuerpo.

**5)** Hallar los coeficientes de Fourier $a_0$, $a_{-1}$ y $a_1$ de la función periódica de periodo uno que en $[-1/2, 1/2]$ coincide con la función signo.

**6)** Hallar la función $C^2$, $y = y(x)$ con $y(-1/2) = y(1/2) = 0$ tal que $\int_{-1}^{1}((y')^2 + y)\,dx$ sea mínima.

**7)** Enuncie (y explique muy brevemente) un resultado matemático empleado en su trabajo (o resuma algún tipo de técnicas matemáticas empleadas)

**8)** Escriba acerca de <u>uno</u> de los siguientes temas: *a)* Las ecuaciones de Euler en mecánica de fluidos. *b)* Ideas básicas del formato JPEG.

**9)** Hallar $a$ y $b$ para que $\vec{v} = (ax^2 + y, 2xy + y, bz)$ pueda ser el campo de velocidades de un fluido incompresible.

**10)** Escribir la ecuación de Maxwell $\frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = c^2 \int_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$ (para cualquier superficie $S$ con frontera $L$) en forma diferencial, sin que aparezcan integrales.

**11)** Si lanzamos 10000 veces una moneda, ¿cómo aproximaría la probabilidad de que salgan más de 5050 caras?

**12)** Hallar la transformada de Radon $P_\theta(t)$ (transformada de rayos X) para la muestra dada por la corona $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$ de densidad uno.

## Segunda prueba final de autoevaluación

**1)** Explique en pocas palabras el tema y los objetivos de su trabajo.

**2)** Escriba acerca de uno de los siguientes temas: *a)* Las ecuaciones de Euler-Lagrange. *b)* La deducción de la ecuación del calor.

**3)** Si una partícula está confinada a moverse en el plano en la elipse $x^2 + 4y^2 = 1$ bajo la acción de un potencial $V = x + 2y$, escribir el lagrangiano correspondiente.

**4)** Comprobar que $t^{-1/2}e^{-x^2/(4t)}$ es solución de la ecuación del calor en una dimensión para $t > 0$.

**5)** Explicar por qué cuando un patinador artístico quiere girar más deprisa, pega los brazos al cuerpo.

**6)** Usando series de Fourier, deducir que según la ecuación del calor en un aro de longitud 1, la temperatura espacial media $\int u \, dl$, no varía.

**7)** Enuncie (y explique muy brevemente) un resultado matemático empleado en su trabajo (o resuma algún tipo de técnicas matemáticas empleadas)

**8)** Escriba acerca de uno de los siguientes temas: *a)* La reconstrucción algebraica en tomografía. *b)* Ideas básicas del formato JPEG.

**9)** Explique por qué el campo de velocidades de un fluido incompresible debe cumplir $\operatorname{div} \vec{v} = 0$.

**10)** Hallar la transformada de Radon $P_\theta(t)$ con $\theta = 0$ y $\theta = \pi/4$ para la muestra de densidad uno $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; |x| + |y| < 1\}$

**11)** Describa un hipotético caso práctico en el que sea útil el teorema central del límite.

**12)** Indica por qué es imposible que una onda electromagnética tenga campo eléctrico $\vec{E} = \big((y - ct)^2, z, x^2 - c^2t^2\big)$, donde $c$ es la velocidad de la luz.