Jugar al gua

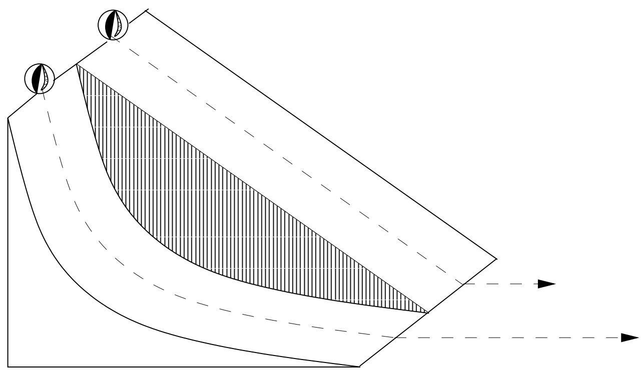
Material:

- Cartón o cartulina.
- Dos canicas iguales.
- Una calculadora.

Realizaremos con el cartón o cartulina dos toboganes conectando los puntos $(0, h)$ y $(l, 0)$ de un plano vertical. El primero será simplemente una rampa recta y el segundo tendrá el perfil de una curva cicloide que responde a la parametrización

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \qquad y = h + a(\cos t - 1).$$

El valor de a se calcula de manera que la curva pase por $(l, 0)$ con lo cual se debe resolver el sistema $a(t - \operatorname{sen} t) = l$, $a(1 - \cos t) = h$. Dividiendo ambas ecuaciones y operando se llega a una ecuación para t que se puede resolver aproximadamente con la calculadora usando el método de Newton estudiado en Cálculo Numérico I (esto es, $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$), después basta tomar $a = h/(1 - \cos t)$. Los datos correspondientes a un experimento real* son $h = 10\,cm$, $l = 16\,cm$, de donde se dedujo de esta forma $a \approx 5'002$.



Una vez construidos ambos toboganes los pondremos uno al lado del otro y dejaremos caer las canicas simultáneamente desde ambos. Con ello comprobaremos experimentalmente

* *N. del A.* Utilicé una cartulina un poco blanda por lo cual encajoné los toboganes usando un juego de construcción. Para obtener el perfil con forma de cicloide simplemente di valores a t y pinté los puntos correspondientes en la cartulina. Si uno utiliza un ordenador con este propósito hay que asegurarse de que no modifica las escalas de x e y. Es conveniente que la pendiente a salvar por los toboganes sea mayor del 60% (concretamente $h/l \geq 2/\pi$, para que la cicloide no se combe hacia arriba). Las condiciones ideales del experimento serían ausencia de rozamiento y que las canicas más que rodar se deslizasen, pero esto último, casi imposible de conseguir, no parece demasiado crítico.

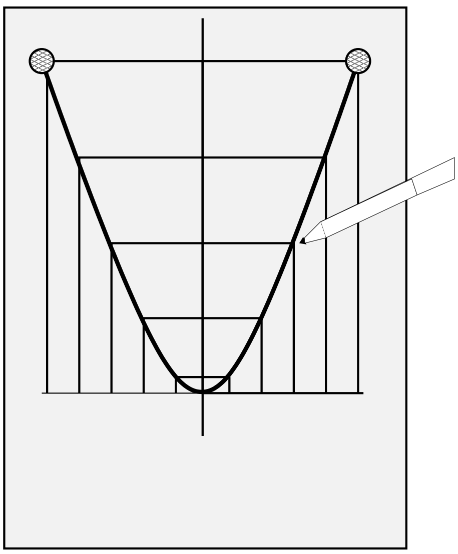
que el tobogán de la cicloide es más rápido por ser la braquistocrona. Si uno tiene paciencia y ganas, puede reemplazar el tobogán recto por cualquier otro. Dentro de unos límites razonables, la braquistocrona siempre vencerá con claridad.

Otro eslabón

Material:

- Una cadena homogénea con eslabones pequeños (por ejemplo de joyería).
- Una hoja de papel milimetrado.
- Un cartón.
- Dos chinchetas.
- Un rotulador de punta fina.
- Una calculadora.

Elijamos dos puntos destacados (digamos de coordenadas enteras) en una misma horizontal del papel milimetrado y clavemos allí con las chinchetas los eslabones de los extremos de la cadena poniendo debajo el cartón. Señalemos la mediatriz (perpendicular en el punto medio) del segmento que une las chinchetas. Cuando pongamos el cartón en vertical y dejemos a la cadena colgar libremente, por la simetría, el punto más bajo pertenecerá a dicha mediatriz. Señalémoslo con el rotulador y marquemos también los puntos de la cadena que pertenecen a las paralelas a la mediatriz a distancias 1, 2, 3, etc. Todo esto se puede hacer cómodamente en horizontal abatiendo el cartón con cuidado para que no se deforme la curva descrita por la cadena.



Después de desclavar la cadena, consideremos unos ejes cartesianos cuyo origen es el punto más bajo y calculemos, mirando las divisiones del papel milimetrado, las coordenadas del resto de los puntos señalados, los cuales serán de la forma (x_n, y_n) con $x_n = n \in \mathbb{Z}$. Aquí citaremos los siguientes datos obtenidos de un experimento real[*]

$y_0 = 0$	$y_2 = 0'65$	$y_4 = 2'9$	$y_6 = 7'55$	$y_8 = 15'75$
$y_1 = 0'2$	$y_3 = 1'6$	$y_5 = 4'95$	$y_7 = 11'1$	$y_9 = 23'5$

Sea (r_0, s_0) el punto donde está una de las chinchetas, en el caso antes citado $(r_0, s_0) = (\pm 9, 23'5)$, y hallemos la solución aproximada, a, de la ecuación

$$s_0 = a\big(\cosh \frac{r_0}{a} - 1\big).$$

Esto puede hacerse aplicando el método de Newton a $f(x) = s_0/a - \cosh(r_0/a) + 1$. Para $r_0 = 9$, $s_0 = 23'5$ se obtiene $a = 3'20241\ldots$ Calculemos finalmente para cada y_n el valor de $a \operatorname{arc\,cosh}(1 + y_n/a)$. En nuestro caso

$y_1 = 0'2 \mapsto 1'126$	$y_4 = 2'9 \mapsto 4'037$	$y_7 = 11'1 \mapsto 6'971$
$y_2 = 0'65 \mapsto 2'007$	$y_5 = 4'95 \mapsto 5'081$	$y_8 = 15'75 \mapsto 7'891$
$y_3 = 1'6 \mapsto 3'081$	$y_6 = 7'55 \mapsto 6'025$	$y_9 = 23'5 \mapsto 9$

y, obviamente, $y_0 \mapsto 0$. A la vista de estos datos, se cumple con gran aproximación $x_n = a \operatorname{arc\,cosh}(1 + y_n/a)$, o lo que es lo mismo, hemos comprobado experimentalmente que la ecuación de una cadena que cuelga de sus extremos es (salvo traslaciones) de la forma

$$y = a\big(\cosh \frac{x}{a} - 1\big)$$

A la curva representada por esta ecuación (o a su trasladada) se le llama catenaria.

Explicación: Cada particulita o eslaboncito de la cadena, al estar en equilibrio, sólo cuenta con energía potencial, $E = mgh$ donde m es la masa, g es la aceleración de la gravedad ($9'8$ en el Sistema Internacional) y h la altura (de *height* no de "~~h~~altura"). Al "sumar" la energía de todas las porciones infinitesimales de la cadena, la energía total

[*] *N. del A.* Utilicé una cadena como las que se usan para llevar medallas. Los eslabones eran de $2\,mm$ y la longitud total de unos $53\,cm$. Clavé las chinchetas con una separación de $18\,cm$, con lo cual señalé 9 puntos a cada lado. La práctica muestra que es muy importante forzar la simetría con respecto a la mediatriz, lo que asegurará la perfecta horizontalidad. Para mayor precisión reemplacé y_n por $(y_n + y_{-n})/2$.

vendrá dada por

$$E = \int gh\, dm = \rho g \int h\, ds$$

donde ρ es la densidad lineal $\rho = dm/ds$ (masa por unidad de longitud) que por la homogeneidad es constante, de modo que el incremento de masa dm es proporcional al incremento de longitud ds. Para cada valor de x se tiene $h = y(x)$ y es fácil convencerse geométricamente de que $ds/dx = \sqrt{1+(y')^2}$ (por Pitágoras $(ds/dx)^2 = (dx/dx)^2 + (dy/dx)^2$), con lo cual

$$E = \rho g \int y\sqrt{1+(y')^2}\, dx.$$

Es natural suponer que esta energía debe ser lo menor posible por la tendencia de las partículas a caer (menor altura $\Rightarrow$ menor energía potencial). En contra de esta tendencia, las chinchetas sujetan la cadena en puntos simétricos $(-c, H)$ y (c, H); y por mucho que quiera caer cada punto la cadena es inextensible y consecuentemente su longitud L invariante. Esto conduce a que la ecuación de la catenaria es una función $y : [-c, c] \longrightarrow \mathbb{R}$ que resuelve el problema matemático

$$\int_{-c}^{c} y\sqrt{1+(y')^2}\, dx \quad \text{es mínimo,} \quad \text{con} \quad \int_{-c}^{c} \sqrt{1+(y')^2}\, dx = L, \quad y(-c) = y(c) = H.$$

Para ello hay que resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange con multiplicadores. Esto es

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial F}{\partial y} \qquad \text{donde} \qquad F = y\sqrt{1+(y')^2} - \lambda\sqrt{1+(y')^2},$$

lo que conduce a $(y-\lambda)y'' = 1 + (y')^2$. Ahora solo hay que aplicar la tecnología del curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias:

$$\frac{y'}{1+(y')^2}y'' = \frac{y'}{y-\lambda} \;\Rightarrow\; \text{(integrando)}\; A^2(1+(y')^2) = (y-\lambda)^2 \;\Rightarrow\; \frac{y'/A}{\sqrt{((y-\lambda)/A)^2 - 1}} = \frac{1}{A}.$$

Una última integración **[Gr-Ry]** 2.261, 1.622.6, conduce a $\operatorname{arc\,cosh}((y-\lambda)/A) = x/A + B$, con A y B constantes, esto es

$$y = \lambda + A\cosh\big(\frac{x}{A} + B\big).$$

La condición $y(-c) = y(c)$ implica $B = 0$. Situando el origen de coordenadas de manera que $y(0) = 0$ se tiene una ecuación como la comprobada experimentalmente. La constante A se relaciona con la longitud por medio de $L = \int \sqrt{1 + (y')^2}$.

Tampoco en este problema de Cálculo de Variaciones acertó Galileo, pues pensó que la catenaria era una parábola **[Gr]**. Hubo que esperar hasta casi 50 años después de su muerte para que Huygens, Leibniz y Johann Bernoulli encontraran la ecuación correcta.

Déjame alguna experiencia, déjame participar 3

A velocidad

Material:

- Una silla giratoria.
- Dos libros gruesos iguales.

Una vez sentados en la silla, cojamos los libros con los brazos extendidos y hagámosla girar impulsándonos con los pies. Una vez que hayamos alcanzado una velocidad de rotación suficiente para que demos alguna vuelta con las piernas estiradas sin necesidad de impulso; recogiendo los pies y llevando los brazos con los libros al pecho notaremos mágicamente un sensible aumento de la velocidad. Este aumento será mayor cuanto más pesados sean los libros*.

Este experimento es una pobre imitación de otro que se puede realizar en muchos Museos de la Ciencia. En vez de girar la silla se hace girar una rueda de bicicleta (mejor una un poco más pesada y menor para que sea más manejable) por un eje que sostenemos en las manos paralelo al suelo y perpendicular a nuestro cuerpo. Al poner de golpe el eje vertical, la silla en contra de toda intuición comenzará a girar con nosotros encima.

Explicación: Para simplificar consideremos sólo la masa M de cada libro representándolos como masas puntuales. Si la distancia de cada libro al eje de giro (nuestro cuerpo) es R, el módulo del momento angular total correspondiente es

$$\|\vec{L}\| = MRv + MRv = 2MRv,$$

* *N. del A.* Utilicé una silla de oficina y los dos tomos de la 21ª edición del diccionario de la R.A.E. con tapas duras. Aunque no son muy pesados (a no ser que uno los lea de una tacada) el cambio de velocidad es apreciable. Probé con libros mayores y aparentemente daban mejor resultado pero era más difícil sostenerlos simétricamente.

con v el módulo de la velocidad. Si el momento angular debe permanecer constante (al menos en intervalos de tiempo pequeños, para que no le dé tiempo a actuar al rozamiento), entonces al encoger los brazos reduciendo R, la velocidad v aumentará. Las piernas también entran en el balance del momento angular y al encogerlas al tiempo que los brazos se aumenta más la velocidad. Este fenómeno lo aprovechan los patinadores artísticos para efectuar giros muy rápidos.