

## Su luz puede valer

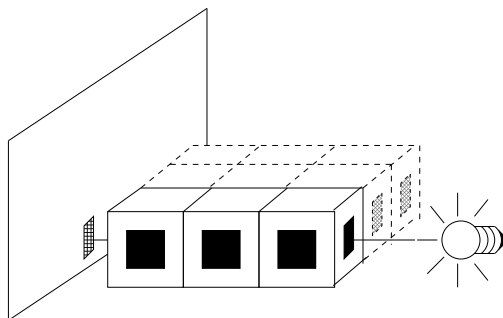
### Material:

- Cartulina.
- Plástico semitransparente (por ejemplo de una bolsa).
- Una linterna.
- Una calculadora.

Como es una verdad universal que ni la carne de burro ni la nuestra se transparentan, no podemos cambiar los rayos X por rayos de luz visible en las aplicaciones médicas (o veterinarias). Lo que vamos a hacer aquí es sustituir los tejidos por unos burdos cubitos translúcidos con los que podamos ilustrar la reconstrucción algebraica.

El experimento en sí es bastante tonto (el próximo es mucho mejor) y quizá sólo sirva para reciclar una briznita de [Ch], de donde está tomado.

Con la cartulina fabricaremos nueve cubos y en sus caras laterales abriremos “ventanas” para que pueda pasar la luz, las cuales cubriremos en algunos de ellos con el plástico semitransparente\*. Al poner tres cubos seguidos y enfocarlos con la luz de la linterna, se pueden detectar en una pantalla (una hoja de papel) cuatro posibles intensidades dependiendo de si ninguno, uno, dos o los tres cubos tienen plástico en sus ventanas.

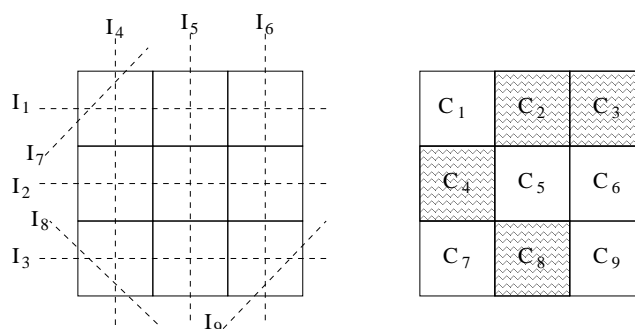


Convencionalmente designaremos estas intensidades por  $I = 1, 1/2, 1/3, 1/4$  respectivamente. Para llevar a cabo el experimento, es importante familiarizarse con ellas de manera que podamos distinguirlas a simple vista. En otro caso, debemos cambiar el tipo de plástico.

---

\* *N. del A.* Construí los cubos de 4 cm de arista y las ventanas de 2×2. Como plástico semitransparente utilicé el de una bolsa blanca de las que dan en los supermercados. Tiene el inconveniente de que difunde la luz porque no queda totalmente lisa, pero en cuanto a transparencia es muy aceptable. Quizá el papel de celofán de colores también sea adecuado.

Dispongamos los cubos formando un cuadrado (si queremos darle emoción y aguantar las burlas, podemos pedirle a alguien que lo haga por nosotros y que tape el resultado con un folio por encima). Dirigiendo la linterna en las tres direcciones horizontales, en las tres verticales y en las oblicuas correspondientes a tres de las cuatro esquinas, tendremos una relación entre el número de cubos semitransparentes en las secciones consideradas y las intensidades registradas.



Supongamos que numeramos los cubos como en la figura y asignamos al cubo  $i$ -ésimo el valor  $C_i = 0$  si está hueco y  $C_i = 1$  si es semitransparente. Entonces se tienen las relaciones

$$(3.3) \quad \begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &= I_1^{-1} - 1 & C_1 + C_4 + C_7 &= I_4^{-1} - 1 \\ C_4 + C_5 + C_6 &= I_2^{-1} - 1 & C_2 + C_5 + C_8 &= I_5^{-1} - 1 \\ C_7 + C_8 + C_9 &= I_3^{-1} - 1 & C_3 + C_6 + C_9 &= I_6^{-1} - 1 \\ C_1 &= I_7^{-1} - 1, & C_7 &= I_8^{-1} - 1, & C_9 &= I_9^{-1} - 1 \end{aligned}$$

En el caso de la figura, habríamos obtenido el vector de intensidades

$$\vec{I} = (I_1, \dots, I_9) = \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 1, 1 \right).$$

Lo que da lugar a un sistema de nueve ecuaciones con nueve incógnitas. Se puede comprobar que (si no usamos que  $C_i \in \{0, 1\}$ ) dicho sistema tiene infinitas soluciones, es compatible indeterminado. Añadiendo una nueva relación: la intensidad  $I_{10} = 1/2$  que pasa por la esquina  $C_3$ , obtenemos finalmente un sistema determinado. Evidentemente si en vez de nueve celdillas tuviéramos miles, esto sería muy costoso de comprobar, y en la práctica simplemente añadiríamos más ecuaciones de las necesarias, pensando que habría que tener muy mala suerte para que todavía el rango de la matriz no fuera el adecuado.

El sistema se resuelve directamente previo pago de hacer unas cuentas, y la solución es  $\vec{C} = (C_1, \dots, C_9) = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$ . Pero como queremos ilustrar la reconstrucción

algebraica, usaremos el algoritmo correspondiente

$$\vec{x}_{n+1} = (L_{10} \circ L_9 \circ \dots \circ L_1)(\vec{x}_n)$$

partiendo de  $\vec{x}_0 = \vec{0}$ . Donde  $L_i$  son las proyecciones en los hiperplanos que definen las ecuaciones de (3.3) y la añadida después (de hecho podríamos reemplazar una de las ecuaciones por ella). Con una calculadora y un poco de paciencia, se pueden hacer una o dos iteraciones. Con un pequeño programilla se puede ir más allá. Por ejemplo, algunos de los  $\vec{x}_n$  obtenidos de esta forma son:

$$\vec{x}_5 = (0, 0'8595, 1, 0'7278, 0'3468, -0'0746, 0, 0'7937, 0)$$

$$\vec{x}_{10} = (0, 0'9081, 1, 0'8908, 0'1925, -0'0832, 0, 0'8994, 0)$$

$$\vec{x}_{15} = (0, 0'9472, 1, 0'9449, 0'1068, -0'0517, 0, 0'9460, 0)$$

$$\vec{x}_{20} = (0, 0'9704, 1, 0'9701, 0'0593, -0'0294, 0, 0'9703, 0)$$

$$\vec{x}_{25} = (0, 0'9836, 1, 0'9835, 0'0329, -0'0164, 0, 0'9835, 0)$$

Nótese que la aproximación de  $\vec{x}_n$  a la solución hace posible adivinar enseguida dónde están los cubos semitransparentes ( $C_i = 1$ ) y los huecos ( $C_i = 0$ ). En el límite  $\vec{x}_n \rightarrow \vec{C}$ .

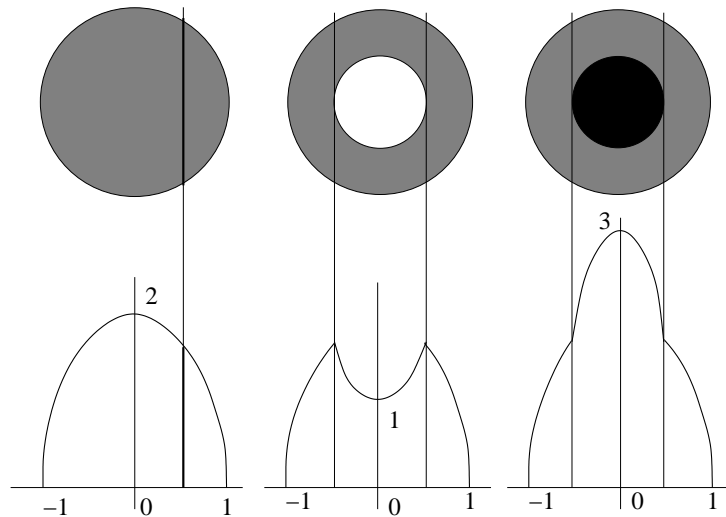


## Pinta el tubo

**Material:**

- Una calculadora programable o un ordenador con un programa de cálculo.
- Un programa para dibujar gráficas (opcional).

Tampoco es plan que vayamos por las tiendas pidiendo una máquina de rayos X para comprobar si verdaderamente podemos recuperar con el método indicado  $\rho$  a partir de las radiografías  $P_\theta$ . Por eso vamos a considerar secciones muy particulares, con simetría radial, de las que nosotros mismos podemos hallar la sombra *a mano*. Para fijar el contexto en el que trabajamos, imaginemos que tenemos unos tubos con simetría radial acotados por  $S^1 \times \mathbb{R}$  y queremos saber, sin romperlos, si son macizos, si tienen una parte hueca, o si tienen un alma (zona central) de mayor densidad. Consideremos justamente tres tubos que respondan a estas características: Uno macizo de radio 1 y densidad 1, otro igual que el anterior pero con la zona central  $0 \leq r \leq 1/2$  hueca, y un tercero con esta zona central rellena de un material de densidad 2. Por la simetría radial, la función “sombra”  $S(t) = P_\theta(t)$  no dependerá del ángulo  $\theta$  y podemos calcularla fácilmente.



$$S_1(x) = \begin{cases} 2\sqrt{1-x^2} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}, \quad S_2(x) = S_1(x) - \frac{1}{2}S_1(2x), \quad S_3(x) = S_1(x) + \frac{1}{2}S_1(2x)$$

Esto es lo que podríamos haber deducido si hubiéramos podido hacer el experimento con rayos X. Lo ideal, pero utópico, es que convenciéramos a un amigo (al menos hasta antes de pedírselo) para que se inventara una estructura interna de un tubo, siempre con simetría radial y sección dentro del círculo unidad, e hiciera los cálculos mostrándonos la ecuación de la función sombra  $S = S(x)$ . El experimento consistirá en que haciendo trabajar a la calculadora o al ordenador, podremos adivinar la estructura del tubo a partir de la función  $S$ .

Exactamente, lo que tenemos que hacer es fijar una *precisión*  $h$  pequeña (aunque si lo es demasiado nos aburriremos antes de que se terminen los cálculos y quizá se acumulen los errores de redondeo) y hacer un programilla que para cada coordenada radial  $R$  calcule

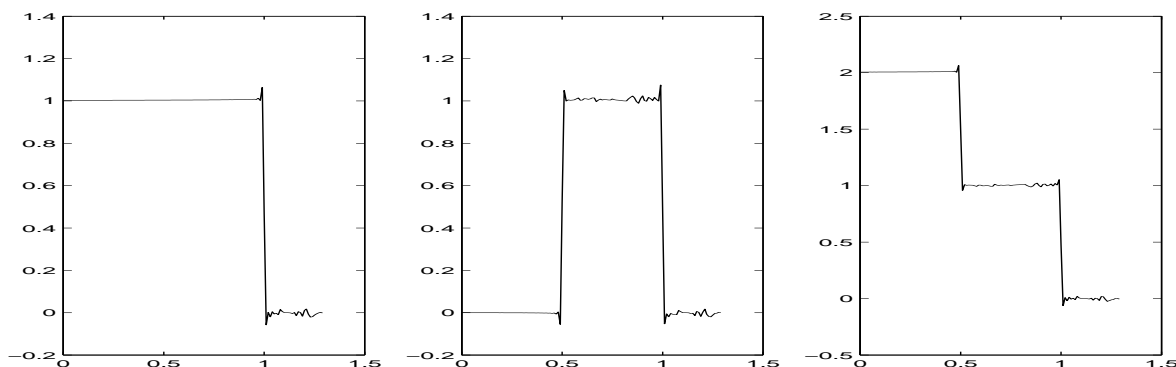
$$D(R) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{\theta_j} \left( \frac{\pi^2}{8} S(R \cos \theta_j) - \sum_{1 \leq k < h^{-1}} \frac{1}{(2k+1)^2} S(R \cos \theta_j + (2k+1)h) \right)$$

donde los  $\theta_j$  recorren  $[0, \pi]$  de  $h$  en  $h$ , esto es,  $\theta_0 = 0$ ,  $\theta_1 = h$ ,  $\theta_2 = 2h$ , etc. Prácticamente en cualquier lenguaje que usemos, programar esta fórmula no requerirá más que un par de bucles, y un tercero para que nos muestre una lista de  $D(R)$  para diferentes valores de  $R$ .

La exactitud que se logra al aproximar la densidad en  $\|\vec{x}\| = R$  por  $D(R)$  es difícil de creer. Por ejemplo, tomando  $h = 0'01^*$ , se obtuvieron los siguientes resultados (se indican entre paréntesis los valores exactos):

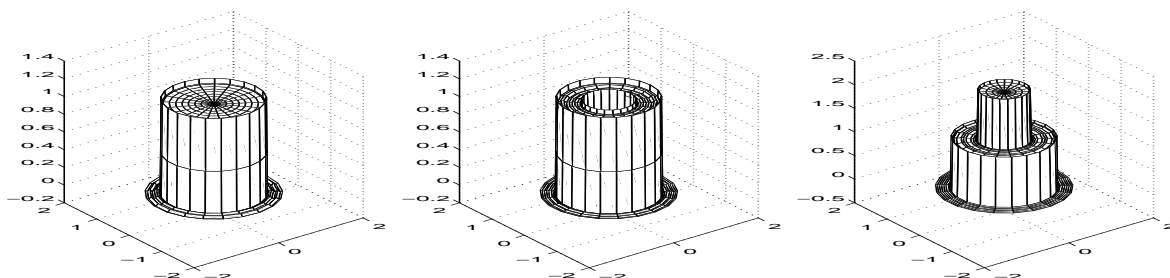
	<b>Tubo 1</b>	<b>Tubo 2</b>	<b>Tubo 3</b>
$R = 0$	1'0025 ( $\rho = 1$ )	0'0003 ( $\rho = 0$ )	2'0048 ( $\rho = 2$ )
$R = 0'25$	1'0032 ( $\rho = 1$ )	-0'0005 ( $\rho = 0$ )	2'0070 ( $\rho = 2$ )
$R = 0'75$	1'0049 ( $\rho = 1$ )	1'0057 ( $\rho = 1$ )	1'0041 ( $\rho = 1$ )

Ya puestos, podemos representar la gráfica de  $D(R)$  en cada caso. Como era de esperar, los errores mayores se producen cerca de las discontinuidades de la densidad.



\* *N. del A.* Utilicé un sencillo programa FORTRAN trabajando en precisión simple.

Y si nos apetece radializar estas gráficas podemos obtener superficies en  $\mathbb{R}^3$ , que no dan más información, pero quedan bonitas.



El problema de reconstruir conjuntos tridimensionales con simetría esférica a partir de fotografías (o radiografías) tiene una posible aplicación práctica en el estudio de la densidad de las galaxias globulares a partir de las imágenes obtenidas con un telescopio [Gr] p. 164.

Explicación: El algoritmo que hemos usado no tiene ningún misterio. Según lo visto en la última sección,

$$\rho(x, 0) = \int_0^\pi F(x \cos \theta) \quad \text{con} \quad F(u) \approx h^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n S(u + nh)$$

con  $a_n = 0$  para los pares, excepto  $a_0 = 1/4$ , y  $a_n = -1/\pi^2 n^2$  para los impares. Por la regla del trapecio (Cálculo Numérico I)

$$\rho(R, 0) \approx h \sum_{\theta_j} F(R \cos \theta_j),$$

y por las simetrías  $a_n = a_{-n}$  y  $S(u) = S(-u)$ , se tiene

$$F(u) \approx h^{-1} \left( \frac{1}{4} S(u) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n S(u + nh) \right),$$

que sustituyendo  $n = 2k + 1$ ,  $a_{2k+1} = -1/(\pi(2k + 1))^2$ , y empleando que  $\text{sop } S \subset [-1, 1]$ , lleva a la fórmula para  $D(R)$  que aproxima a  $\rho(R, 0)$ .

