Puede que poder pudieras

Material:

- Diez dados.
- Un cubilete.
- Material para dibujar una gráfica.

Consideremos la variable aleatoria que asigna la cara de puntuación n de un dado el número $(n-3'5)/\sqrt{175/6}$. Se comprueba con un cálculo que tiene esperanza nula y varianza $0'1$. El teorema central del límite sugiere que si consideramos el lanzamiento de 10 dados y la suma S de sus puntuaciones, entonces $(S-35)/\sqrt{175/6}$ tiene aproximadamente una distribución $N(0,1)$. Equivalentemente, S tiene aproximadamente una distribución $N(35,\sqrt{175/6})$. Es decir, cabe esperar

$$\text{Prob}(S=n)\approx\frac{1}{\sqrt{175\pi/3}}\,e^{-3(n-35)^2/175}.$$

La cantidad de formas en que se puede obtener suma igual a n, $10\le n\le 60$ al lanzar 10 dados está recogida en la siguiente tabla:

10 → 1	**11** → 10	**12** → 55	**13** → 220	**14** → 715
15 → 2002	**16** → 4995	**17** → 11340	**18** → 23760	**19** → 46420
20 → 85228	**21** → 147940	**22** → 243925	**23** → 383470	**24** → 576565
25 → 831204	**26** → 1151370	**27** → 1535040	**28** → 1972630	**29** → 2446300
30 → 2930455	**31** → 3393610	**32** → 3801535	**33** → 4121260	**34** → 4325310
35 → 4395456	**36** → 4325310	**37** → 4121260	**38** → 3801535	**39** → 3393610
40 → 2930455	**41** → 2446300	**42** → 1972630	**43** → 1535040	**44** → 1151370
45 → 831204	**46** → 576565	**47** → 383470	**48** → 243925	**49** → 147940
50 → 85228	**51** → 46420	**52** → 23760	**53** → 11340	**54** → 4995
55 → 2002	**56** → 715	**57** → 220	**58** → 55	**59** → 10
60 → 1				

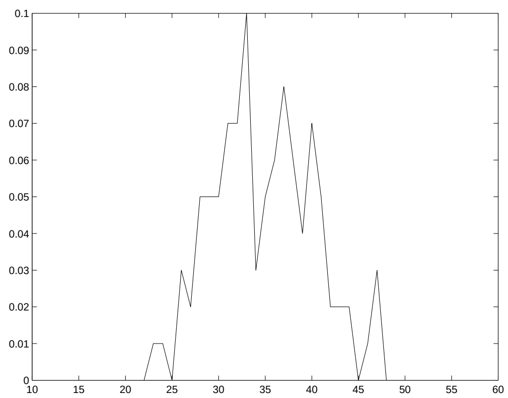
La probabilidad de $S=n$ es por tanto el número asignado a n dividido por el número de casos posibles $6^{10}=60\,466\,176$. Con ello se comprueba que la bondad de la aproximación anterior es increíble teniendo en cuenta que sólo usamos $N=10$ dados mientras que la teoría nos habla de lo que ocurre cuando $N\to\infty$. Si representamos en una gráfica ambos miembros de la aproximación, no es posible detectar diferencias a simple vista, salvo quizá en los tres puntos centrales donde el error relativo es menor que el 2%.

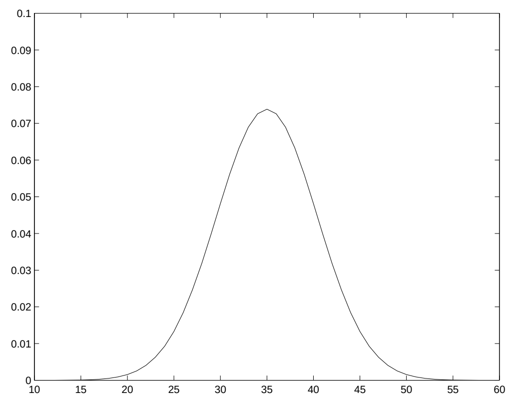
Una vez que hemos visto lo extraordinariamente bien que una normal aproxima a la distribución de la suma de las puntuaciones de 10 dados, el experimento consistirá en comprobar que si estimamos las probabilidades estadísticamente tirando nosotros mismos los dados, nos cansaremos antes de ver una campana de Gauss decente. La moraleja es que debemos creer ciegamente en la Estadística pero no siempre en las estadísticas.

Concretamente, el experimento es muy simple y consiste en lanzar los dados con el cubilete un número de veces grande A, hasta que nos aburramos, y apuntar en cada caso la suma. Al terminar, tras desperezarnos, compararemos las gráficas obtenidas al representar los puntos con abcisa $10 \le n \le 60$ y ordenadas

$$\frac{\text{n}^{\underline{\text{o}}}\text{ de veces en que la suma es } n}{A}, \qquad \frac{1}{\sqrt{175\pi/3}}\, e^{-3(n-35)^2/175}.$$

Por ejemplo, en un experimento real[*] con $A = 100$ se obtuvo





El error en el punto central $n = 35$ es de más del 30% y en el punto anterior $n = 34$ de casi el 60%.

<u>Explicación</u>: En principio no hay ninguna contradicción: la aproximación es tan buena como antes sólo si A es suficientemente grande (ley de los grandes números [**Fe**]). La pregunta natural es por qué 100 o 200 (donde sólo habrán llegado los más pacientes) no es un número *suficientemente grande*. Evidentemente con un ordenador podríamos simular

[*] *N. del A.* Como el experimento es un poco largo, más vale hacerlo con comodidad. Lancé los datos en un barreño para que no se desperdigaran. Después de cada tirada los llevaba hacia el borde alineándolos y copiaba las puntuaciones en una hoja de cálculo que efectuaba las sumas en mi lugar. Con ello también quise recopilar datos sobre las fecuencias para tratar de desmentir la queja típica cuando se juega al parchís de que existe "el dado de los seises".

el lanzamiento de los dados un millón de veces y entonces el resultado sería bastante aproximado, pero hacer el experimento 100 o 200 veces de verdad, sin delegar en las tripas de un ordenador, conlleva tanto esfuerzo que es descorazonadora la pobreza de la aproximación.

Demos a nuestra pregunta una forma matemática un poco más concreta y calculemos por ejemplo de qué tamaño debe ser típicamente A para que el error en el punto central $n = 35$ sea menor que el 10%. Para tal fin, considérese la variable aleatoria que al tirar los dados A veces cuenta el número de veces en que la suma es 35 (número de éxitos). Esta variable aleatoria claramente tiene una distribución binomial $B(A, p)$ con p la probabilidad de obtener suma igual a 35. Según la tabla, $p = 4395456/6^{10} \approx 0'074$. La esperanza de esta binomial es pA, y la desviación típica $\sqrt{p(1-p)A}$, por tanto cuando hagamos el experimento A veces, lo normal es que en vez de obtener pA veces suma 35 la obtengamos $pA + \texttt{error}$ veces con $\texttt{error}$ una cantidad comparable a $\sqrt{p(1-p)A}$. Si queremos que el error relativo sea típicamente menor que el 10%, se debería cumplir

$$\sqrt{p(1-p)A} < \frac{10}{100}pA, \qquad \text{o equivalentemente} \qquad A > \frac{1-p}{(0'1)^2 p}.$$

Sustituyendo p por $0'074$, esto conduce a $A > 1251$.

El error cometido al efectuar nuestra estadística preguntando a muchos dados qué número se obtiene como suma, ha sido bastante burdo: simplemente no deberíamos haber preguntado a muchos, sino a muchísimos, a más de mil. Errores como éste no se producen en las estadísticas serias (que no son todas las que aparecen en los medios de comunicación), porque son de algún modo de naturaleza matemática. Aunque éstos pueden llegar a ser realmente sutiles **[Ju]**, seguramente los errores más graves en las estadísticas y que posiblemente invalidan un número no desdeñable de ellas, están ligados a factores psicológicos. Por ejemplo, es muy fácil obtener un "no sabe/no contesta" o una mentira al preguntar sobre temas escabrosos. También la forma de las estadísticas está muchas veces influida por lo que se quiere demostrar o por los propios prejuicios. Por ejemplo, si la imagen I de un suceso trágico e impresionante ha aparecido muchas veces en televisión, las preguntas: "¿Cree usted que se ha emitido demasiadas veces I?", "¿Cree usted que se debería evitar la emisión de I? "y ¿Cree usted que deberían prohibir emitir I?"; arrojarían resultados desiguales. Si hiciéramos la primera pregunta la respuesta sería seguramente "sí", pero si hiciéramos la segunda o la tercera, casi todos intentamos no involucrarnos en algo que sugiera escabullirse o prohibir, de modo que la respuesta tendería más al "no". Las conclusiones que alguien sacara de los resultados podrían llegar a ser opuestas aunque las preguntas no lo sean.

Los que hayan hecho la experiencia anterior con los dados, probablemente ya habrán notado una curiosa manifestación experimental de lo psicológico. Al tirar los 10 dados casi todas las veces parece que las puntuaciones obtenidas tienen algo de singular e improbable: hay muchos seises, hay varios dados seguidos con puntuación ascendente, casi todas las puntuaciones son menores que cuatro, etc. La mayoría de las veces pensamos que hemos tenido "buena" o "mala suerte", sin saber reconocer lo rutinario.

Todo por igual

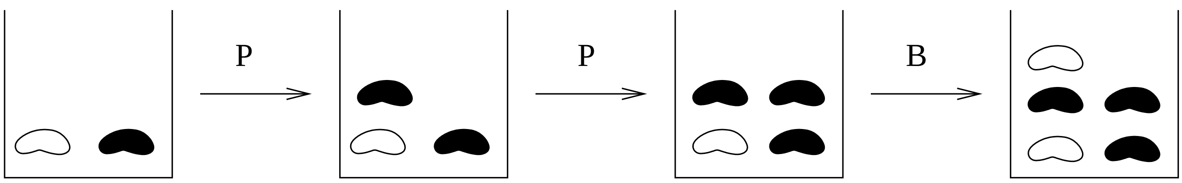
Material:

- Un montón de judías blancas crudas (sin cocinar).
- Un montón de judías pintas similares a las anteriores.
- Un programa para generar números aleatorios y dibujar gráficas (opcional).

¿Qué ocurre cuando dos empresas compiten lanzando al mercado productos similares e incompatibles? Estamos acostumbrados a ver que en esta situación (sistemas de vídeo, sistemas operativos de ordenadores), después de una pugna inicial con altibajos, la empresa que logra una ventaja significativa acaba con la otra, independientemente de la calidad del producto, ya que *el pez grande se come al chico.*

Lo que vamos a comprobar, gracias a un bello, interesante y sorprendente modelo conocido como *urna de Pólya*, es que el mundo matemático es menos violento y pemite una coexistencia pacífica.

Metamos una judía de cada color en un bote. Éstas representarán los productos iniciales de cada empresa. No es descabellado suponer que los clientes eligen al azar entre los nuevos productos, por tanto si hay una desproporción en la oferta a favor de uno de ellos, lo elegirán más. Escojamos pues, una judía al azar del bote, y después de verla, repongámosla y añadamos otra judía del mismo color. Ahora habrá dos judías de un tipo y una de otro, con lo cual es más fácil escoger las primeras. Repitamos el procedimiento un número grande de veces*.

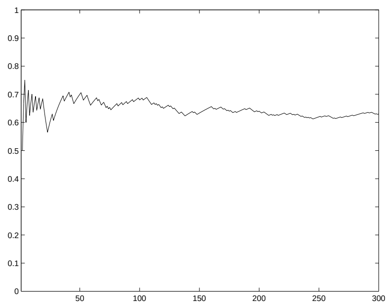


Cabría esperar que una mayoría clara obtenida al azar, en unas cuantas iteraciones se convierte en aplastante. Pero el experimento nos muestra, prácticamente siempre, volcando el bote, que hay una proporción apreciable de la minoría que no sólo no tiende a desaparecer sino que parece estabilizarse.

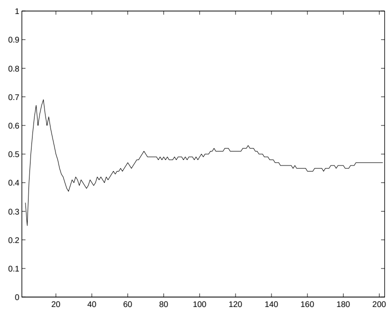
* *N. del A.* Repetí el proceso 200 veces anotando los resultados en una hoja de cálculo para poder representar la evolución del sistema.

Una simulación con ordenador nos muestra que éste es el caso.

Simulación



Ejemplo real



<u>Explicación</u>: Sea X_n la variable aleatoria que toma el valor 1 si en la n-ésima extracción la judía es blanca y 0 si es pinta. La propiedad importante de estas variables aleatorias es que aunque no son independientes, son *intercambiables*. Esto quiere decir que para cualquier vector de ceros y unos $\vec{v} \in \{0,1\}^N$, se tiene la igualdad de probabilidades

$$P\big((X_1, X_2, \ldots, X_N) = \vec{v}\big) = P\big((X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(N)}) = \vec{v}\big)$$

donde σ es cualquier permutación en S_N (reordenamiento de $1, 2, \ldots, N$). Este hecho, muy poco intuitivo, es ridículamente sencillo de comprobar escribiendo las cuentas. Por ejemplo, las probabilidades de que las tres primeras extracciones sea BBP, BPB o PBB, son repectivamente (abajo se indica las que hay de cada tipo en el bote):

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}$$

B	1	2	3	3
P	1	1	1	2

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}$$

B	1	2	2	3
P	1	1	2	2

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}$$

B	1	1	2	3
P	1	2	2	2

La probabilidad de que al extraer N judías, las primeras m sean blancas y las $N-m$ restantes pintas, es

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{m}{m+1}\cdot\frac{1}{m+2}\cdot\frac{2}{m+2}\cdot\frac{3}{m+2}\cdot\ldots\cdot\frac{N-m}{N+1} = \frac{m!(N-m)!}{(N+1)!}.$$

Por la propiedad de intercambiabilidad, la probabilidad de que después de N extracciones haya exactamente $m+1$ judías blancas en el bote es, por tanto

$$P(X_1 + X_2 + \ldots + X_N = m) = \binom{N}{m}\frac{m!(N-m)!}{(N+1)!} = \frac{1}{N+1}.$$

Es decir, que todas las proporciones de judías blancas y pintas son equiprobables. La distribución de esta proporción es la uniforme (para la existencia y sentido de la “distribución límite”, véase [**Fe**]).