

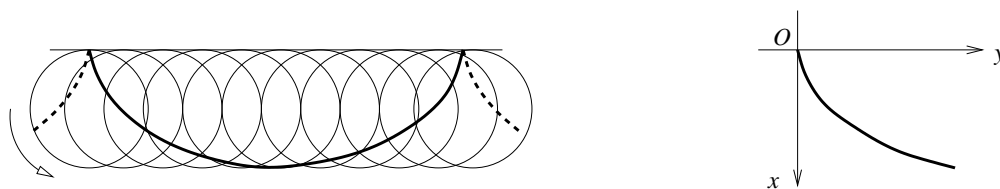
# 1. Modelos de la Mecánica

## 1.1. Te diste mucha prisa

El famoso problema de la braquistocrona no sólo permite contar una bella historia que incluso es verdad, sino que estuvo en el origen de una nueva área de las Matemáticas, el Cálculo de Variaciones, que más tarde y hasta nuestros días se revelaría como fundamental para entender la Mecánica en cualquiera de sus variantes (clásica, relativista, cuántica). En este terreno las famosas palabras de Euler: “Nada tiene lugar en el mundo cuyo significado no sea el de algún máximo o mínimo” [Ti] se han vuelto proféticas.

El problema fue propuesto en 1696 por Johann Bernoulli (de los Bernoulli de toda la vida, la famosa y no muy bien avenida familia de Matemáticos de los siglos XVII y XVIII) como un reto a la comunidad científica. Consiste en encontrar la curva, digamos la forma del tobogán, que une dos puntos de manera que los cuerpos, digamos humanos, que caen por ella lo hagan en el menor tiempo posible. De ahí lo de *braquistocrona*, del griego  $\beta\rho\alpha\chi\nu\varsigma$ =breve y  $\chi\rho\nu\nu\omicron\varsigma$ =tiempo. Varios matemáticos ilustres respondieron al reto resolviéndolo. Entre ellos Newton, al que sólo le llevó unas horas (Newton tenía la habilidad de humillar a sus adversarios y también la de ser un genio). De su solución, publicada anónimamente, dijo J. Bernoulli que podía reconocer “al león por sus garras” [Mu].

Una primera conjetura que se podría hacer es que la braquistocrona es una recta, a fin de cuentas la recta es la curva más corta que une dos puntos. Pero basta realizar unos cálculos para percatarse de que los niños se divertirán más en menos tiempo con un arco curvo. De hecho ya Galileo, mucho antes de la propuesta de Bernoulli, pensaba erróneamente que la braquistocrona era un arco de circunferencia [Ti]. La solución correcta, sin embargo, es un arco de cicloide, la curva descrita por un punto en el borde de una moneda que rueda a lo largo de una regla. Concretamente es un arco que parte de uno de sus puntos picudos.



Situemos un sistema de coordenadas en el punto de partida  $O$ , girado  $-\pi/2$  con respecto a su posición habitual, para que la coordenada  $x$  mida la altura desde  $O$ . Como la aceleración de la gravedad es  $g$ , para un cuerpo en caída libre (quitamos la curva) la altura en función del tiempo es  $x = \frac{1}{2}gt^2$  y la velocidad  $v = gt$ , así que  $v = \sqrt{2gx}$ . Por el principio de conservación de la energía ( $\frac{1}{2}mv^2 = mgx$ ) esta última fórmula sigue siendo

cierta para un cuerpo que cae a lo largo de una curva. Por la definición de velocidad y la regla de la cadena

$$v \frac{dt}{dx} = \frac{dt}{dx} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{1 + (y'(x))^2} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{2gx}}.$$

Entonces el tiempo que se tarda en salvar una altura  $H$  a lo largo de cierta curva  $y = y(x)$  es

$$T = \int_0^H \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{2gx}} dx.$$

Dados  $H$  e  $y(H)$ , tenemos que buscar la función  $y = y(x)$  que haga mínimo  $T$ .

Diccionario:

- Forma del tobogán  $\rightarrow$  Función  $y = y(x)$  con  $y(0) = 0$ .
- Tiempo de caída  $\rightarrow T = \int_0^H \sqrt{(1 + (y'(x))^2)/(2gx)} dx$ .
- Braquistocrona  $\rightarrow$  Función uniendo  $(0, 0)$  y  $(H, y(H))$  para la que  $T$  es mínimo.

Lo que necesitamos es una especie de método de máximos y mínimos “a lo grande” donde los puntos son sustituidos por funciones. Resulta que esto no es tan difícil como pudiera parecer al principio (si damos por supuestas la existencia y unicidad), y con el truco universal de integrar por partes se deduce del método de máximos y mínimos de Cálculo I. (Una forma alternativa de complicar las cosas siguiendo a Euler es considerar que una función es un montón de puntos muy próximos y emplear Cálculo II o Cálculo III, [La] p. 52, [Ch] p. 73).

**Proposición 1.1.** *Sea  $F \in C^2$ . Si la integral*

$$I = \int_a^b F(y(x), y'(x), x) dx$$

*alcanza un extremo (máximo o mínimo) en el conjunto de funciones  $C^2([a, b])$  que verifican  $y(a) = c$ ,  $y(b) = d$ ; entonces la función para la que se alcanza dicho extremo debe satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{\partial F}{\partial y}$$

donde  $\partial F/\partial y$  y  $\partial F/\partial y'$  indican las derivadas con respecto a la primera y segunda variables, y se suponen evaluadas en  $(y(x), y'(x), x)$ .

Nota: El *Cálculo de Variaciones* es una rama de las Matemáticas que se ocupa principalmente de calcular extremos de expresiones integrales similares a  $I$  (funcionales), en las que el integrando depende de ciertas funciones incógnita.

DEM.: Supongamos que el extremo se alcanza para  $y = y_0(x)$ , y sea  $\eta \in C^\infty$  con  $\eta(a) = \eta(b) = 0$  arbitraria. Entonces la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida mediante

$$f(\epsilon) = \int_a^b F(y_0(x) + \epsilon\eta(x), y_0'(x) + \epsilon\eta'(x), x) dx$$

debe alcanzar un extremo en  $\epsilon = 0$ . Por consiguiente

$$0 = f'(0) = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx.$$

Integrando por partes el segundo sumando del integrando, se deduce

$$0 = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) \eta dx.$$

Como  $\eta$  es una función  $C^\infty$  arbitraria salvo porque se anula en los extremos, la única posibilidad es que el otro factor sea nulo. ■

En el caso de la braquistocrona, si cerramos los ojos ante la singularidad en  $x = 0$  y confiamos en que es parte del enunciado que la función  $y$  en la que se alcanza el mínimo sea regular, podemos aplicar la proposición anterior con  $F = \sqrt{(1 + (y')^2)/(2gx)}$ . Evidentemente  $\partial F/\partial y = 0$  y

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{\partial F}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{cte} \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{2gx(1 + y'^2)}} = \text{cte}.$$

Esta constante sólo se anula en el caso de caída libre que no consideramos. Escribámosla por conveniencia como  $1/\sqrt{4gC}$ , entonces la ecuación anterior, después de despejar, es

$$y' = \sqrt{\frac{x}{2C - x}}.$$

Por tanto basta calcular la integral de  $\sqrt{x}/\sqrt{2C - x}$ . Uno puede conseguirlo con sus propias

manos, con esfuerzo, llevando a cabo algunos cambios de variable, o con menos esfuerzo utilizándolas para coger el pesado tomo [**Gr-Ry**] (véase 2.225.2 con  $x = 1/t$ ), pero es más conveniente para presentar la solución efectuar un solo cambio de variable llovido del cielo dado por  $x = C(1 - \cos u)$ . Con él la integral se transforma en

$$C \int \sin u \sqrt{\frac{1 - \cos u}{1 + \cos u}} du = C \int \sin u \sqrt{\frac{(1 - \cos u)^2}{1 - \cos^2 u}} du = C \int (1 - \cos u) du = C(u - \sin u).$$

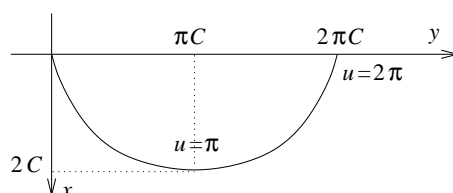
De este modo, la braquistocrona en forma paramétrica responde a la ecuación de la cicloide

$$(1.1) \quad x = C(1 - \cos u), \quad y = C(u - \sin u).$$

La constante  $C$  se ajusta de forma que para  $x = H$ ,  $y$  tome el valor  $y(H)$  especificado.

El problema que plantea la singularidad en  $x = 0$  no es relevante porque siempre en la demostración de la proposición se puede imponer que la función  $\eta$  tienda a cero en los extremos tan rápido como se desee “matando” la singularidad.

Cuando  $u$  varía en  $[0, 2\pi]$ , la  $x$  decrece en la segunda mitad del intervalo y por tanto no define una función (univaluada)  $y = y(x)$ .



El punto de retroceso corresponde a  $x = 2C$ ,  $y = \pi C$ . De modo que para condiciones iniciales con  $y(H) > \pi H/2$  el tobogán dado por la braquistocrona se comba hacia arriba, lo cual no es muy intuitivo: todos diríamos que para ir rápido por un tobogán siempre deberíamos bajar. Si  $y$  no es una función de  $x$  el razonamiento antes empleado para deducir la ecuación (1.1) a través de la proposición no tiene sentido, pero todo vuelve a funcionar buscando ahora una solución en la que los nombres de los ejes estén intercambiados.

Epílogo: Al igual que en el cálculo de una variable existe un criterio de la derivada segunda, en el Cálculo de Variaciones existe la llamada *segunda variación* para detectar si algo es un máximo o un mínimo [**La**], [**Du-Fo-No**] §36. Pero se muestra mucho menos eficiente que en Cálculo I. La dificultad es esencialmente topológica: es mucho más difícil trabajar con espacios de dimensión infinita, los de funciones, que con los números reales. Incluso teoremas tan naturales como los “tres teoremas fuertes” de [**Sp**], pueden ser complicadísimos o incluso falsos.

## Ejercicios

1) Sin mirar la teoría: a) Deducir la ecuación de Euler-Lagrange para  $\int_a^b F(y, y', x) dx$ .  
b) Obtener la fórmula que da el tiempo de caída en función de la forma del tobogán.

2) Probar que la cicloide  $x = C(1 - \cos u)$ ,  $y = C(u - \operatorname{sen} u)$ , corresponde a la curva descrita por un punto en el borde de una moneda que rueda a lo largo de una regla situada en el eje  $Y$ . ¿De qué radio es la moneda?

3) En la Luna (gravedad menor) o en Júpiter (gravedad mayor), ¿tiene una forma diferente la braquistocrona que en la Tierra? ¿Es el tiempo de caída igual?

4) Escribir la ecuación de Euler-Lagrange correspondiente al problema de Cálculo de Variaciones que se deriva de “La línea más corta uniendo dos puntos es la línea recta”.

5) Suponiendo que el problema tiene una solución  $C^2$ , hallar la función  $y = y(x)$  con  $y(-1) = y(1) = 0$  para la que  $\int_{-1}^1 (y')^2 + 4 \int_{-1}^1 y$  es mínimo. Utilizar el resultado para probar que bajo condiciones de regularidad adecuadas,

$$u(-1) = u(1) = 0 \Rightarrow \int_{-1}^1 (u')^2 + 4 \int_{-1}^1 u \geq -\frac{8}{3}.$$

6) Un animal se mueve en un terreno pantanoso que es más denso a mayor profundidad, de forma que la velocidad que desarrolla es proporcional a la altura sobre el fondo. Probar que para ir de un punto a otro en menor tiempo debe seguir un arco de circunferencia. (Supóngase que el problema tiene solución  $C^2$ ).

7) Hallar la integral y la ecuación diferencial correspondiente, cuando en el problema de la braquistocrona se considera  $x = x(y)$ .

8) La desigualdad de Wirtinger afirma que para cualquier  $f \in C^1([a, b])$  con  $f(a) = f(b) = 0$  se cumple  $\int_a^b f^2 \leq \pi^{-2}(b-a)^2 \int_a^b (f')^2$ . Demostrar que la constante  $\pi^{-2}(b-a)^2$  es óptima, no se puede reducir conservando la desigualdad.

9) Una partícula de masa 2 que se mueve por la recta real parte en  $t = 0$  con velocidad 1 y al cabo de un segundo tiene velocidad 0, deteniéndose. Sabiendo que su energía potencial en cada punto  $x$  es  $x(x-1)$ , y que el movimiento se realiza de modo que la integral de la energía total, cinética más potencial, es mínima; calcular la ecuación de movimiento.

10) Probar que si  $a < 0 < b$ ,  $A \neq B$  y  $n \geq 1$ , entonces  $\int_a^b x^n (y')^2 dx$  no alcanza un extremo entre las funciones  $y \in C^2$  con  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$ .

11) En  $C^1([0, 1])$  se tiene la norma natural  $\|y\| = \sup |y(x)| + \sup |y'(x)|$ . Probar que  $I = \int_0^1 y^2(1 - (y')^2)$  con  $y \in C^1$ ,  $y(0) = y(1) = 0$ , alcanza un mínimo relativo en  $y \equiv 0$ , en el sentido de que en el entorno  $\{y \in C^1 : \|y\| < 1\}$ , el mínimo de  $I$  se alcanza en ella. Demostrar, sin embargo, que  $I$  no tiene mínimo (absoluto), ya que  $\inf_{y \in C^1} I = -\infty$ .

## Trabajos sugeridos

### De la sección:

- Historia del Cálculo de Variaciones (la contribución de cada autor y problemas de la Física-Matemática de los que surgió).
- Formulación de las ecuaciones básicas de la relatividad general a partir del Cálculo de Variaciones (sólo aconsejable si se tienen conocimientos sólidos de Geometría).

### Generales:

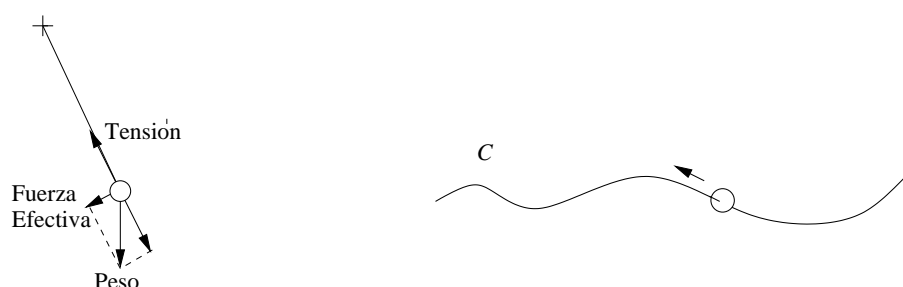
- Algoritmos de ordenación y búsqueda y sus aplicaciones.
- El átomo de hidrógeno.

### Las palabras del sabio...

*La historia lo prueba; la física no solamente nos ha obligado a elegir entre los problemas que se presentaban en tropel; nos ha informado de problemas en los cuales, sin ella, nunca habríamos pensado. [Po] p. 99.*

## 1.2. Más sencillo

Uno de los primeros ejemplos del curso de Física para Matemáticos seguramente fue el péndulo simple [Al-Fi] §12.5. Se tenía una partícula de masa  $m$  que oscilaba unida a una varilla (supuesta inextensible, rígida de masa cero) y había que aplicar como siempre  $\vec{F} = m\vec{a}$ . En principio  $\vec{a} = \vec{r}''(t)$  con  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ , el vector de posición de la partícula, y  $\vec{F} = (0, -mg)$ , el peso. Pero esto no da resultado porque la partícula está ligada a moverse en  $x^2 + y^2 = \text{cte}$ . Los libros de Física introducen una fuerza de tensión que compensa la componente normal del peso, lo que indica que la partícula no se puede mover a lo largo de la varilla. Al final, hacen desaparecer  $x$  e  $y$  escribiendo todo en función del ángulo. A los principiantes las tensiones les suelen parecer en este y otros problemas unas fuerzas fantasmagóricas que nunca se ven y que sólo se introducen como un truco para eliminar las componentes normales.



La aparición de las tensiones se debe a que tratamos con dos coordenadas  $(x, y)$  un problema que es intrínsecamente unidimensional porque  $x^2 + y^2 = \text{cte}$ . En general, supongamos que tenemos en  $\mathbb{R}^3$  una partícula ligada a una curva  $C$ , es decir, una cuenta de collar ensartada en un alambre curvo. Aunque el vector de posición tenga tres coordenadas está claro que con un solo parámetro  $q$ , por ejemplo la longitud de arco, se describe la posición de la partícula  $\vec{r} = (x(q), y(q), z(q))$ . Si estudiamos cómo varía  $q$  en función del tiempo,  $q = q(t)$ , sabremos todo acerca del comportamiento mecánico. Digamos que la fuerza es conservativa, esto es  $\vec{F} = -\nabla V$  con  $V$  sólo dependiendo de la posición. Como antes, lo que tenemos que hacer es quedarnos sólo con la parte tangencial a  $C$  de la ecuación  $\vec{F} = m\vec{a}$ .

Al ser  $d\vec{r}/dq$  un vector tangente a  $C$ , se tiene:

$$\text{Proyec. de } m\vec{r}'' \text{ en la tang.} = \text{Proyec. de } \vec{F} \text{ en la tang.} \Leftrightarrow m\vec{r}'' \cdot \frac{d\vec{r}}{dq} = -\nabla V \cdot \frac{d\vec{r}}{dq}$$

(donde aquí y en lo sucesivo, prima o doble prima en  $\vec{r}$  indican derivadas con respecto del tiempo). Esto se puede escribir de una forma más retorcida pero equivalente, como

$$\frac{d}{dt} \left( m\vec{r}' \cdot \frac{d\vec{r}}{dq} \right) = m\vec{r}' \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dq} \right) - \frac{dV}{dq}.$$

Ya que  $V(q) = V(\vec{r}(q)) \Rightarrow dV/dq = \nabla V \cdot d\vec{r}/dq$ . (Véase [Sp] p. 236 y [Ch] p. 12 para comen-

tarios acerca del abuso de notación cometido). Considerando  $\vec{r}'(t) = (x'(q), y'(q), z'(q))q' = q' \frac{d\vec{r}}{dq}$  como función de dos variables,  $q$  y  $q'$ , se puede retorcer todavía más la ecuación anterior a

$$\frac{d}{dt} \left( m\vec{r}' \cdot \frac{\partial \vec{r}'}{\partial q'} \right) = m\vec{r}' \cdot \frac{\partial \vec{r}'}{\partial q} - \frac{dV}{dq}.$$

Definiendo el *lagrangiano*  $L = T - V$  donde  $T$  es la *energía cinética*  $\frac{1}{2}m\vec{r}' \cdot \vec{r}'$  en función de  $q$  y  $q'$ , la última ecuación se escribe como (recuérdese que  $V$  sólo depende de  $q$ )

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial q'} \right) = \frac{\partial L}{\partial q}.$$

Según habíamos visto en la sección anterior esto equivale a que la integral  $\int L dt$  alcance un valor estacionario (más adelante definiremos exactamente este término). Es como si la partícula para ir de un punto a otro pensara primero todas las posibles formas de ir, calculase las integrales del lagrangiano, y escogiese la que corresponde al valor estacionario (no es extraño que algunos precursores de este tipo de métodos les dieran un sentido filosófico o metafísico [La]). El Principio de Hamilton [Co-Hi] afirma que esto es una ley fundamental general que funciona con ligaduras más complicadas en el movimiento o con más partículas, considerando  $L$  como la diferencia de las energías cinética y potencial totales. Todo lo que se pide es que las coordenadas estén ligadas por ecuaciones que definan subvariedades que podamos parametrizar con algunos parámetros  $q_1, \dots, q_k$ . En este caso, en Mecánica se dice que las ligaduras son *holónomas* y que el sistema tiene  $k$  *grados de libertad* [Go].

**Principio de Hamilton:** *El movimiento de un sistema mecánico descrito por los parámetros  $q_1, q_2, \dots, q_k$  se lleva a cabo entre los instantes  $t_0$  y  $t_1$  de tal modo que la integral*

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L dt$$

*es estacionaria entre todas las posibles funciones  $q_i$  con  $q_i(t_0)$  y  $q_i(t_1)$  fijos.*

Nota: El significado exacto de *estacionario* es que al cambiar  $q_i$  por  $q_i + \epsilon_i \eta_i$ , donde  $\eta_i$  es una función regular que se anula en  $t_0$  y  $t_1$ , la función  $J(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k)$  sea estacionaria en el origen, esto es,  $\nabla J(\vec{0}) = \vec{0}$ . Para abreviar se suele escribir  $\delta J = 0$ .

#### Diccionario:

- Movimiento de sistemas mecánicos  $\longrightarrow$  Funciones  $q_1, q_2, \dots, q_k$  tales que  $\delta J = 0$ .



Para que el Principio de Hamilton sea efectivo debemos encontrar las ecuaciones de Euler-Lagrange que le corresponden. El gran avance es que en ellas sólo aparecerán las funciones  $q_i$  que nosotros hayamos elegido al parametrizar el sistema.

**Teorema 1.2.** Sea  $L$  una función  $C^2$  de  $2k + 1$  variables. La integral

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L(q_1(t), \dots, q_k(t), q'_1(t), \dots, q'_k(t), t) dt$$

es estacionaria para ciertas funciones  $q_i \in C^2([t_0, t_1])$  con extremos prefijados, si y sólo si satisfacen las ecuaciones de Euler Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial q'_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

DEM.: Todo lo que hay que hacer es adaptar la prueba para el caso unidimensional utilizada en el problema de la braquistocrona. Así pues, para  $\eta_i$  funciones regulares que se anulen en los extremos, se define

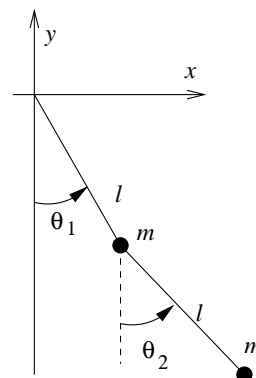
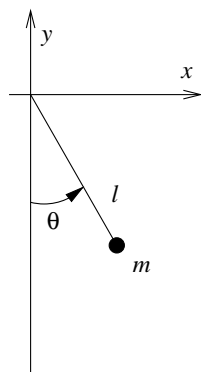
$$J(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k) = \int_{t_0}^{t_1} L(q_1(t) + \epsilon_1 \eta_1(t), \dots, q'_k(t) + \epsilon_1 \eta'_k(t), t) dt.$$

Al imponer  $\nabla J(\vec{0}) = \vec{0}$ , se tiene

$$0 = \frac{\partial J}{\partial \epsilon_i} = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \eta_i + \frac{\partial L}{\partial q'_i} \eta'_i \right) dt.$$

Integrando por partes el segundo sumando se transforma en  $-\eta_i \frac{d}{dt} (\partial L / \partial q'_i)$  y se siguen las ecuaciones del enunciado. ■

Por ejemplo, si en el péndulo simple elegimos como coordenada el ángulo  $\theta$  con la vertical entonces  $L = T - V = \frac{1}{2} m ((x')^2 + (y')^2) - mgy = \frac{1}{2} ml^2 (\theta')^2 + mgl \cos \theta$ , y las ecuaciones de Euler-Lagrange se reducen a la bien conocida del péndulo  $\theta'' + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$ .



Si unimos a este péndulo otro similar (péndulo doble), hay dos grados de libertad que

pueden representarse con los dos ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  con las verticales. En este caso el lagrangiano se complica pero conceptualmente es mucho más sencillo que tratar de aplicar directamente  $\vec{F} = m\vec{a}$ :

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2}m((x'_1)^2 + (y'_1)^2) + \frac{1}{2}m((x'_2)^2 + (y'_2)^2) - mgy_1 - mgy_2 \\ &= ml^2((\theta'_1)^2 + \frac{1}{2}(\theta'_2)^2 + \theta'_1\theta'_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) + mgl(2 \cos \theta_1 + \cos \theta_2). \end{aligned}$$

Hay diversas variantes del teorema anterior. Por ejemplo, si se permite que  $L$  pueda depender de las derivadas de  $q_i$  de hasta orden  $m$ , es fácil ver que las ecuaciones de Euler-Lagrange pasan a ser

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial q'_i} \right) - \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial L}{\partial q''_i} \right) + \dots + (-1)^{l+1} \frac{d^l}{dt^l} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(l)}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

Si se buscan valores estacionarios de  $\int L$  condicionados a que  $\int M = \text{cte}$ , el método de los multiplicadores de Lagrange estudiado en Cálculo II o Cálculo III se puede incorporar a la demostración anterior. Con ello se prueba que el único cambio en las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes es que hay que reemplazar  $L$  por  $L - \lambda M$  (véase [La]). Otra variante que tiene un interés capital tanto teórico como práctico es el caso en que las funciones incógnitas dependen de varias variables. En este caso en las ecuaciones de Euler-Lagrange hay que contabilizar las derivadas con respecto a todas las derivadas parciales. Con ello se establece una equivalencia en algunos casos de interés entre ecuaciones en derivadas parciales y problemas de extremos. Por ejemplo, calcular la solución de  $\Delta u = f$  en  $\Omega$  con  $u = 0$  en la frontera es lo mismo que calcular el mínimo de  $\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 + 2fu$ . El método de elementos finitos de Cálculo Numérico II aprovecha de esta relación buscando mínimos aproximados escribiendo  $u$  como combinación lineal de funciones sencillas [St-Bu] §7.7, por ejemplo lineales a trozos. Con el desarrollo de los ordenadores, éste método se ha mostrado fundamental en ingeniería.

Si una partícula está ligada a moverse en una superficie  $S$  sin verse sometida a ningún campo de fuerzas externas,  $V = 0$ , el lagrangiano es  $L = \frac{1}{2}m\|\gamma'(t)\|^2$  donde  $\gamma$ , con  $\text{Im } \gamma \subset S$ , es la curva que representa la trayectoria de la partícula. El Principio de Hamilton requiere que el valor de la “energía”  $\int \|\gamma'(t)\|^2 dt$  sea estacionario. A continuación veremos que minimizar la energía implica minimizar la longitud. Esta última propiedad caracteriza localmente a las geodésicas. Por ello no es sorprendente que estas viejas amigas nuestras de la Geometría II coincidan con las trayectorias de las partículas en  $S$ .

**Proposición 1.3.** *Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular y  $p, q \in S$ . Si  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$*

es una curva regular incluida en  $S$  con  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(1) = q$  tal que  $\int_0^1 \|\gamma'(t)\|^2 dt$  es mínima entre todas las curvas de este tipo, entonces  $\|\gamma'\|$  es constante y  $\gamma$  también tiene longitud mínima.

DEM.: Localmente la superficie vendrá dada por una parametrización  $\mathbf{X}(u_1, u_2)$  y la curva  $\gamma$  corresponde a cierta dependencia  $u_1 = u_1(t)$ ,  $u_2 = u_2(t)$ . Con lo cual  $\|\gamma'(t)\|^2 = \sum g_{ij} u'_i(t) u'_j(t)$ . Estos  $g_{ij} = g_{ij}(u_1, u_2)$  son los coeficientes de la primera forma fundamental [Do]. Llamando  $L$  a este sumatorio, un cálculo prueba que

$$(1.2) \quad u'_1 \frac{\partial L}{\partial u'_1} + u'_2 \frac{\partial L}{\partial u'_2} - L = L.$$

Si  $\gamma$  tiene la propiedad minimizante del enunciado, por las ecuaciones de Euler-Lagrange  $\frac{d}{dt}(\partial L / \partial u'_i) = \partial L / \partial u_i$ . Al derivar con respecto de  $t$  el primer miembro de (1.2), considerando  $L = L(u_1(t), u_2(t), u'_1(t), u'_2(t))$ ; se obtiene:

$$u''_1 \frac{\partial L}{\partial u'_1} + u'_1 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial u'_1} \right) + u''_2 \frac{\partial L}{\partial u'_2} + u'_2 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial u'_2} \right) - \frac{d}{dt} L$$

que se anula al transformar el segundo y el cuarto sumandos con las ecuaciones de Euler-Lagrange y aplicar la regla de la cadena a  $dL/dt$ . De modo que (1.2) implica que  $\|\gamma'(t)\|^2$  es constante en el tiempo. Digamos  $\|\gamma'(t)\| = E$ .

La longitud de  $\gamma$  es  $\int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = E$ . Si no fuera mínima existiría otra curva  $\lambda(t)$  conectando  $p$  y  $q$  con  $\int_0^1 \|\lambda'(t)\| dt = \tilde{E} < E$ . Quizá reparametrizando (tomando  $t$  proporcional a la longitud de arco), se puede suponer que  $\|\lambda'(t)\|$  es constante y por tanto que vale  $\tilde{E}$ . De aquí

$$\int_0^1 \|\lambda'(t)\|^2 dt = \tilde{E}^2 < E^2 = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|^2 dt,$$

lo que contradice la propiedad minimizante de  $\gamma$ . ■

Un resultado como éste tiende un puente entre la Mecánica y la Geometría. Incluso bajo la presencia de un potencial los movimientos de una partícula se pueden identificar con geodésicas en ciertas subvariedades [Du-Fo-No] §33.3.

Epílogo: En el campo gravitatorio resulta que todas las partículas de prueba sufren la misma aceleración, independientemente de su masa, cuando son atraídas por una masa mucho mayor. Si la geodésica que sigue una partícula no depende de su masa, se puede entender la gravitación como algo puramente geométrico, una *curvatura* universal del espacio que hace que las geodésicas no sean rectas. Para ser coherente con la concepción

de Minkowski del espacio y el tiempo dentro de un mismo continuo, la curvatura también debe afectar al tiempo. Éstos son a grandes rasgos los puntos de partida de la relatividad general. Lo más complejo de esta teoría es la difícil ecuación que relaciona la curvatura con la masa. Dicho sea de paso, Einstein llegó a ella con mucho esfuerzo de forma no muy sistemática, tanteando diversas posibilidades; mientras que D. Hilbert (que publicó su resultado unos días antes que el propio Einstein) dedujo esta ecuación básica de la relatividad general con técnicas de Cálculo de Variaciones, como un teorema a partir del postulado físico de que esencialmente el espacio-tiempo trata de curvarse lo menos posible [Du-Fo-No] §39.

## Ejercicios

1) Sin mirar la teoría: a) Enunciar el Principio de Hamilton y explicar sus ventajas.  
b) Escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange.

2) Utilizando el Principio de Hamilton, estudiar el movimiento de una partícula que cae por un plano inclinado.

3) Hallar las ecuaciones de Euler-Lagrange y resolverlas, para el sistema formado por dos masas  $m_1$  y  $m_2$  que cuelgan, una a cada lado, de una polea de masa despreciable, por medio de una cuerda inextensible de longitud  $L$ .

4) De entre todas las gráficas de longitud  $\pi$  de funciones pares positivas conectando  $(-1, 0)$  y  $(1, 0)$ , hallar la que limita área máxima con el eje  $X$ . (Se supone que hay una función  $f \in C^2((-1, 1))$  de la que proviene la gráfica).

5) Hallar el número de grados de libertad y el lagrangiano para el sistema formado por dos partículas que se mueven dentro del paraboloide  $z = x^2 + y^2 + 1$  sin que actúe ningún potencial.

6) Se dice que  $q_i$  es una variable *ignorable* si no aparece explícitamente en el lagrangiano. Este caso es muy interesante físicamente porque conduce a una cantidad que se conserva a lo largo del movimiento del sistema. Explicar cómo.

7) Empleando coordenadas polares, escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a una partícula que se mueve en el plano suponiendo la energía potencial gravitatoria  $-GMm/r$  debida una masa  $M$  fija en el origen.

8) Pruébese que en el problema anterior se cumple la segunda ley de Kepler: “El vector de posición de la partícula barre áreas iguales en tiempos iguales”.

9) En la relatividad especial el lagrangiano correspondiente a una partícula libre, con  $V = 0$ , es  $L = mc\sqrt{c^2(t')^2 - (x')^2 - (y')^2 - (z')^2}$  donde  $x, y, z, t$  (que ahora son  $q_1, q_2, q_3, q_4$ ) dependen de lo que se llama el *tiempo propio*  $\tau$ , que es el tiempo medido por un observador que viaja con la partícula. Probar que las partículas libres se mueven describiendo rectas. Explicar qué relación guarda  $L$  con la famosísima fórmula  $E = mc^2$  para partículas en reposo.

10) Sea  $\gamma \in C^2$  la curva en la esfera unidad  $S^2$  que conecta  $(0, 0, 1)$  y  $(1, 0, 0)$  minimizando la “energía”  $\int_0^1 \|\gamma'(t)\|^2 dt$ . Hallar su ecuación.

11) Hallar el polinomio de grado 2 con  $P(0) = 0$ ,  $P(1) = 1$ , para el que  $\int_0^1 (P')^2 + \int_0^1 P^2$  es mínimo. Escribiendo  $u(x, y) = u_1(x)u_2(y)$ , hallar la solución de  $-\Delta u + 2u = 0$  en  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$  satisfaciendo  $u(x, y) = u(y, x)$  en la frontera de  $Q$  y  $u(0, 0) = 0$ ,  $u(1, 1) = 1$ . Comprobar numéricamente que  $u(x, y) \approx P(x)P(y)$  y dar razones para ello.

## Trabajos sugeridos

### De la sección:

- Principios variacionales en Mecánica y sus aplicaciones.
- Elementos finitos en ingeniería.
- El teorema de Noether en Mecánica y Teoría de Campos.
- Mecánica Celeste.

### Generales:

- Aplicaciones de la Teoría de Grafos.
- Grupos cristalográficos planos (mosaicos de la Alhambra).

### Las palabras del sabio...

*Supongamos un sistema formado por  $n$  puntos materiales, visibles o no; esto hará en total  $3n$  coordenadas; considerémoslas como las coordenadas de un punto único en un espacio de  $3n$  dimensiones. En virtud de las ligaduras de que acabamos de hablar, este punto único estaría sujeto a permanecer sobre una superficie de un número cualquiera de dimensiones  $< 3n$ ; para ir de un punto a otro, sobre esta superficie, se tomaría siempre el camino más corto; ese sería el principio único que resumiría toda la mecánica*

*Cualquier cosa que se piense de esta hipótesis, que nos seduzca por su simplicidad o nos choque por su carácter artificial, el solo hecho de que Hertz haya podido concebirla y considerarla como más cómoda que nuestras hipótesis habituales, basta para probar que nuestras ideas ordinarias y, en particular, las tres dimensiones del espacio, de ningún modo se imponen al mecánico con una fuerza invencible. [Po] p. 85, 86.*

### 1.3. Bailando al aire

Si tomamos un ortoedro homogéneo (algo con forma de ladrillo) tal que las tres aristas que confluyen en cada vértice tengan longitudes bien distintas podemos observar un curioso fenómeno. Al lanzarlo al aire imprimiéndole un giro de eje vertical, el ortoedro se “dejará girar” cuando el eje sea paralelo a la arista mayor o a la menor, pero no cuando lo sea a la intermedia sin presentar grandes cabeceos. Incluso con la caja de una cinta de vídeo se puede observar el fenómeno (aunque no es la mejor forma de hacerlo). Para hallar las ecuaciones que rigen el cabeceo de un sólido rígido que gira es necesario enunciar una de las leyes fundamentales en Mecánica: la ley de conservación del momento angular, la cual, paradójicamente, indica a grandes rasgos la tendencia que tienen los sistemas a mantener un eje de rotación fijo.

Para una partícula de masa  $m$  describiendo una trayectoria  $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$  con velocidad  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ , el *momento angular* se define en cada instante  $t$  como

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}.$$

Si la partícula gira en movimiento circular alrededor de un eje que pasa por el origen, se llama *velocidad angular*  $\vec{\omega}$  al vector en la dirección de este eje (con sentido compatible con el de giro) y cuyo módulo es la variación del ángulo en función del tiempo,  $d\theta/dt$ . Su relación con la velocidad de la partícula es

$$(1.3) \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (\text{es decir } \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}).$$



Al sustituir se tiene  $\vec{L} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  y después de desarrollar el doble producto vectorial con  $\vec{r} = (x, y, z)$  se puede escribir

$$\vec{L} = m\mathcal{M}\vec{\omega} \quad \text{donde} \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

Evidentemente en un movimiento circular de una partícula como el descrito,  $\vec{L}$  no se conserva a no ser que el origen esté en el plano de rotación, lo cual está relacionado físicamente con el hecho de que al hacer girar una pelota unida a una cuerda como una honda, podemos hacer que la cuerda genere un círculo, pero no un cono.

En un sólido rígido que rota, el momento angular se define como la “suma” de los

momentos angulares que lo componen, es decir

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad \text{con} \quad I = \int \rho \mathcal{M} dx dy dz$$

donde  $\rho = dm/d\text{Vol}$  es la densidad, y la integral de  $\mathcal{M}$  se realiza componente a componente. Es posible probar que la matriz  $I$  es definida positiva. La ley de conservación del momento angular es una sencilla consecuencia del equilibrio de fuerzas en un sistema de partículas que pueden interactuar dos a dos en la dirección de la recta que las une (véase [Al-Fi] §9.4, [Ru] p. 18). Implica que para un sólido rígido en ausencia de fuerzas externas  $\vec{L}$  no varía. Es decir

$$(1.4) \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad (\text{conservación del momento angular}).$$

Sobre la superficie terrestre no es fácil deshacerse de la fuerza externa  $\vec{F}$  dada por la gravedad que se aplica en el centro de masas situado en  $\vec{r}_0$  y (1.4) debe modificarse reemplazando el segundo miembro por  $\vec{r}_0 \times \vec{F}$  [Al-Fi] §9.4, con lo que el eje de giro varía en general (lo que plantea cierto problema al definir  $\vec{\omega}$  como variación del ángulo [Go] §1.2, §4.8). Esto queda ilustrado a grandes rasgos en el movimiento de una peonza [Al-Fi] §10.6. Cuando su eje se ha inclinado un poco por las fuerzas de rozamiento, deja de estar fijo adquiriendo un movimiento rotatorio alrededor de la vertical, llamado *precesión*, debido al término  $\vec{r}_0 \times \vec{F}$ .

Si lanzamos verticalmente un sólido rígido que rota libremente entonces  $\vec{r}_0$  y  $\vec{F}$  son paralelos con lo que (1.4) es válida. Fijando un sistema de referencia unido rígidamente al sólido, digamos situado en el centro de gravedad, se tiene que  $I$  es una matriz constante, llamada *tensor de inercia*, (lo de “tensor” indica cómo cambia al transformar el sistema de referencia). Para el ejemplo de un ortoedro homogéneo de masa  $M$  y dimensiones  $a \times b \times c$ ,  $a > b > c$ , y unos ejes de coordenadas en la dirección de las aristas, situados en el centro del ortoedro, el tensor de inercia es una matriz diagonal, por la simetría. Su primer elemento es  $I_1 = \frac{M}{abc} \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (y^2 + z^2) dx dy dz = (b^2 + c^2)M/12$ , y permutando las variables, se tiene que los otros dos no nulos son  $I_2 = (a^2 + c^2)M/12$ ,  $I_3 = (a^2 + b^2)M/12$ .

Nuestro objetivo es utilizar las ecuaciones que describen  $\vec{\omega}$  en un sistema de referencia pegado al sólido para estudiar cómo cabecea al girar. La existencia del cabeceo, que parece contradecir la conservación del momento angular, es fácil de intuir dinámicamente pensando en una regla rectangular clavada por su centro oblicuamente a una varilla que gira.





La fuerza centrífuga crea un par que trata de poner la regla horizontal dando lugar a oscilaciones armónicas simples.

Para escribir el modelo matemático, nótese que una base ortonormal  $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ , que suponemos positivamente orientada, debe cumplir, según (1.3),  $d\vec{u}_i/dt = \vec{\omega} \times \vec{u}_i$  si está pegada al sólido (considérese la velocidad de una partícula en la punta de  $\vec{u}_i$  o entiéndase esto como la definición de la velocidad angular). Lo que vamos a hacer es cambiar de base la ecuación (1.4) con un poco de ingenio para que el resultado sea manejable. Aunque la elección de un sistema adecuado de coordenadas sugiere un acercamiento lagrangiano (que es posible, [Ge]), aquí seguiremos un camino más directo.

#### Diccionario:

- Sistema de referencia ligado al sólido  $\longrightarrow$  Base ortonormal  $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  orientada positivamente con  $d\vec{u}_i/dt = \vec{\omega} \times \vec{u}_i$ .
- Eje de giro  $\longrightarrow$  Dirección del vector  $\vec{\omega}$ .
- Momento angular  $\longrightarrow \vec{L} = I\vec{\omega}$  con  $I$  definida positiva y constante en  $\mathcal{B}$ .
- Conservación del momento angular  $\longrightarrow d\vec{L}/dt = \vec{0}$  en la base canónica.

Un conocido teorema de Álgebra Lineal asegura que una matriz definida positiva se diagonaliza con un cambio ortogonal. En consecuencia es posible orientar los ejes definidos por los vectores de  $\mathcal{B}$  conservando sus propiedades y de manera que  $I$  sea diagonal y por tanto  $L_i = I_i\omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , para ciertos  $I_i > 0$ , donde  $L_i$  y  $\omega_i$  son las coordenadas de  $\vec{L}$  y  $\vec{\omega}$  en la base  $\mathcal{B}$ . Quizá reordenando los vectores de la base y cambiándolos de sentido se puede suponer  $I_1 \leq I_2 \leq I_3$  sin perder la orientación positiva.

**Proposición 1.4.** *Sea  $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  una base ortonormal positivamente orientada con  $\vec{u}_i = \vec{u}_i(t)$  y tal que  $d\vec{u}_i/dt = \vec{\omega} \times \vec{u}_i$  para cierto vector (variable)  $\vec{\omega} = \omega_1\vec{u}_1 + \omega_2\vec{u}_2 + \omega_3\vec{u}_3$ . Sea  $\vec{L} = I_1\omega_1\vec{u}_1 + I_2\omega_2\vec{u}_2 + I_3\omega_3\vec{u}_3$  con  $I_1, I_2, I_3$  constantes positivas. Entonces  $d\vec{L}/dt = \vec{0}$  si y sólo si*

$$(1.5) \quad \begin{cases} I_1\omega_1' = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \\ I_2\omega_2' = (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 \\ I_3\omega_3' = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 \end{cases}$$

DEM.: Por la definición de  $\vec{L}$  y la regla del producto

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \frac{d}{dt}(I_i\omega_i\vec{u}_i) = \sum (I_i\omega_i'\vec{u}_i + I_i\omega_i(\vec{\omega} \times \vec{u}_i)).$$

Sustituyendo  $\vec{\omega} = \omega_1\vec{u}_1 + \omega_2\vec{u}_2 + \omega_3\vec{u}_3$ . y empleando  $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{u}_3$ ,  $\vec{u}_2 \times \vec{u}_3 = \vec{u}_1$ , etc. por

ser base ortonormal positivamente orientada, la ecuación  $i$ -ésima de (1.5) se deduce de la anulación del coeficiente de  $\vec{u}_i$ . ■

Incluso sin resolver explícitamente (1.5) es posible conocer el aspecto de las trayectorias. Lo cual desde el punto de vista físico es natural por la conservación de la energía.

**Proposición 1.5.** *Cualquier trayectoria de una solución no nula  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  de (1.5) pertenece a la intersección de los elipsoides*

$$I_1^2 x^2 + I_2^2 y^2 + I_3^2 z^2 = C, \quad I_1 x^2 + I_2 y^2 + I_3 z^2 = K,$$

para ciertas constantes  $C, K > 0$ .

DEM.: La derivada de  $I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2$  es  $2I_1^2 \omega_1 \omega_1' + 2I_2^2 \omega_2 \omega_2' + 2I_3^2 \omega_3 \omega_3'$ . Sustituyendo  $I_i \omega_i'$  empleando (1.5), se llega a

$$2I_1(I_2 - I_3)\omega_1\omega_2\omega_3 + 2I_2(I_3 - I_1)\omega_1\omega_2\omega_3 + 2I_3(I_1 - I_2)\omega_1\omega_2\omega_3 = 0.$$

La derivada de  $I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2$  da el mismo resultado sin los coeficientes  $I_i$  frente a los paréntesis, por lo que también se anula. ■

Supongamos que  $I_1, I_2$  e  $I_3$  son distintos. La intersección de estos elipsoides es típicamente una curva (llamada *polhode* [A1-Fi] p.310) pero si  $C = I_i K$  se reduce a un punto (y su simétrico) en el  $i$ -ésimo eje de coordenadas. Esto corresponde a las soluciones obvias  $\vec{\omega} = (\text{cte}, 0, 0), (0, \text{cte}, 0), (0, 0, \text{cte})$ . Es decir, que justamente al girar por los ejes de  $\mathcal{B}$ , llamados *ejes principales*, ni el observador exterior que usa la base canónica ni el que está subido al sólido que usa  $\mathcal{B}$ , notarán ninguna variación del momento angular. Estas soluciones corresponden a puntos críticos del sistema autónomo (1.5). Uno de ellos es inestable y pequeñas perturbaciones iniciales provocarán a la larga grandes variaciones. Según la proposición anterior, todo lo que tenemos que hacer para entender las trayectorias es hacer la intersección de dos elipsoides, y la estabilidad está incluida en el siguiente lema geométrico. Es un buen reto de percepción espacial tratar de visualizarlo. Recuérdese que el diámetro de un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  es la máxima distancia entre cada par de sus elementos. Por convenio tomamos  $\text{diam} \emptyset = 0$ .

**Lema 1.6.** *Sea  $\mathcal{E}_C$  y  $\mathcal{E}_K$  los elipsoides de la proposición anterior con  $0 < I_1 < I_2 < I_3$  y  $K > 0$  fijados, y consideremos su intersección positiva  $\mathcal{A}_{C,K} = \mathcal{E}_C \cap \mathcal{E}_K \cap \{x, y, z \geq 0\}$ . Entonces  $\lim_{C \rightarrow I_i K} \text{diam} \mathcal{A}_{C,K} = 0 \Leftrightarrow i = 1, 3$ .*

DEM.: Si  $i = 1$ , multiplicando la ecuación de  $\mathcal{E}_K$  por  $I_1$  y restando la de  $\mathcal{E}_C$ , se tiene  $I_2(I_2 - I_1)y^2 + I_3(I_3 - I_1)z^2 = C - I_1 K$ . Como  $I_2 - I_1, I_3 - I_1 > 0$ , al tomar límites se sigue  $y = z = 0$  (es una elipse cada vez menor) y  $\mathcal{A}_{C,K}$  “tiende” a ser el punto  $(\sqrt{K/I_1}, 0, 0)$ . El caso  $i = 3$  es análogo. Si  $i = 2$ , sea  $C = I_2 K + \epsilon$  con  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño y sean  $P = \mathcal{A}_{C,K} \cap \{x = 0\}$  y  $Q = \mathcal{A}_{C,K} \cap \{y = 0\}$ . Es fácil ver que  $P$  y  $Q$  son no vacíos y se reducen a un punto. Además  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P = (0, \sqrt{K/I_2}, 0)$ , de modo que  $\text{diam} \mathcal{A}_{C,K} \geq d(P, Q) \geq \sqrt{K/I_2}$ . ■

## Ejercicios

1) Sin mirar la teoría: a) Enunciar y explicar la ley de conservación del momento angular. b) Definir el tensor de inercia.

2) Explicar matemáticamente por qué para cada  $\vec{r}$  fijado existe una matriz  $\mathcal{M}$  tal que  $\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \mathcal{M}\vec{\omega}$  para todo  $\vec{\omega}$ . Partiendo de esta definición de  $\mathcal{M}$ , demostrar que es semidefinida positiva (esto es,  $\vec{\omega}^t \mathcal{M} \vec{\omega} \geq 0, \forall \vec{\omega}$ ) y que su núcleo es  $\{\vec{\omega} : \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{0}\}$ . Concluir que el tensor de inercia es definido positivo.

3) Si movemos la cabeza con un giro cuya matriz es  $A$ , los vectores  $\vec{L}$ ,  $\vec{r}$  y  $\vec{v}$  pasan a ser  $A\vec{L}$ ,  $A\vec{r}$  y  $A\vec{v}$ . Explicar por qué esto sugiere que para todo  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$  se cumple  $A\vec{x} \times A\vec{y} = A(\vec{x} \times \vec{y})$ . Estudiar cómo hay que modificar esta relación para que sea válida para toda matriz ortogonal  $A$ .

4) Sean  $I_1 = 1, I_2 = 2, I_3 = 3$  y  $K = 1$ . Hallar las proyecciones en los planos  $YZ, XZ$  y  $XY$  de la trayectorias cuando  $C$  vale  $1 + \epsilon, 2 \pm \epsilon$  y  $3 - \epsilon$ , respectivamente. Explicar el resultado del problema anterior en términos de la estabilidad.

5) Calcular  $I_1, I_2, I_3$  para una esfera y para una barra cilíndrica.

6) Para que una palanca de primera especie (un balancín) con dos masas en los extremos esté en equilibrio, el producto de cada masa por su brazo (distancia al punto de apoyo) debe dar lo mismo. Deducir esta ley estática de la conservación de la conservación del momento angular. (Probar primero que para una partícula  $d\vec{L}/dt = \vec{r} \times \vec{F}$  con  $\vec{F}$  la fuerza).

7) En Física se suele llamar *energía cinética de rotación* de un cuerpo que gira, a  $E_R = \frac{1}{2} \vec{\omega}^t I \vec{\omega}$ . Probar que ésta no es más que la “suma” de las energías cinéticas de las partículas que componen el cuerpo, teniendo en cuenta que  $\vec{r}' = \vec{\omega} \times \vec{r}$ .

8) Escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange para el sistema formado por dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  unidas por una cuerda inextensible que pasa por una polea homogénea de radio  $R = 0'5$  y masa  $M = 2$ . Téngase en cuenta en el lagrangiano las energías cinéticas de las partículas y la de rotación de la polea.

9) Si un tronco de masa  $m$  cae por una rampa (un plano inclinado) rodando sin delizarse y sin rozamiento, razonar si llega antes abajo cuando es fino o cuando es grueso.

10) Estudiar si el sentido de la precesión de una peonza que gira rápidamente coincide con el sentido de giro, con el opuesto, o no hay relación entre ambos.

11) Supongamos que  $\omega$  es el módulo de la velocidad angular de una peonza por su eje, y  $\Omega$  es el de la velocidad angular de precesión. Probar que si  $\omega$  es mucho mayor que  $\Omega$ , entonces  $\Omega\omega$  es aproximadamente constante para cada peonza.

## SECCIÓN 1.3

# Trabajos sugeridos

### De la sección:

- Estudio detallado del movimiento giroscópico.
- El concepto matemático de estabilidad en problemas de Física y otras ciencias.
- Sistemas dinámicos.

### Generales:

- Algoritmos de primalidad y factorización y sus aplicaciones en criptografía.
- Funcionamiento de las centralitas telefónicas y distribución de las llamadas en los teléfonos móviles.

## Las palabras del sabio...

*Es imposible representarse el espacio absoluto; cuando quiero representarme simultáneamente objetos y a mí mismo en movimiento en el espacio absoluto, en realidad me represento a mí mismo, inmóvil, mirando moverse a mi alrededor diversos objetos y un hombre que es exterior a mí pero que convengo en llamar yo.*

*¿Estará resuelta la dificultad cuando se consienta en referir todo a estos ejes ligados a nuestro cuerpo? ¿Sabemos esta vez qué es un punto, definido así por su posición relativa con respecto a nosotros? Mucha gente responderá que sí y dirá que “localiza” los objetos exteriores. [Po] p. 58.*

## 1.4. De película

Gracias a ciertas propiedades químicas [Al-Ta], [Is], cuando un alambre que determina una curva cerrada se sumerge en una solución jabonosa y después se extrae de ella, se forma una película muy delgada que tiene como frontera a dicha curva. Todos sabemos cómo continúa la historia: después de meter un aro, soplamos y tenemos una pompa de jabón. Su forma esférica se explica por la presión que ejerce el aire encerrado en su interior, como en un globo homogéneo. Si no soplamos, y simplemente introducimos curvas de formas caprichosas, nos sorprenderemos de las curiosas superficies obtenidas [Is], y parafraseando a [Hi-Tr] p. 91, pasaremos de un divertimento para niños a un *divertimento para niños y matemáticos* (véanse las fotos en [Hi-Tr] p. 93 y la primera hoja de [Mo]). Pero antes de desempolvar nuestro libro de Geometría II, debemos adentrarnos unas líneas en el modelo físico.

Si en la superficie de una membrana delgada y tensa damos un pequeño corte, los dos bordes se separan (el rasgón cuando no se usa la lejía adecuada es la prueba). Lo cual indica que hay una fuerza tangencial a la superficie y perpendicular a los bordes, la *tensión*, que sujeta ambos bordes cuando están unidos. Se llama *tensión superficial* a la magnitud  $\tau$  de tal fuerza por unidad de longitud (parece claro que cuanto más largo sea el roto más fuerza se habrá desatado al hacerlo). Quizá en una membrana elástica real  $\tau$  esté lejos de ser constante (aunque así se supone en los modelos clásicos [Fe-Le-Sa] 12-7), pero en una película jabonosa esto es cierto con gran aproximación.

Si consideramos un pequeño “parche cuadrado” de película de jabón centrado en un punto  $p$  y de lado  $\epsilon$ , las tensiones actuando en cada lado medirán todas lo mismo,  $\epsilon\tau$ . Para que este parche esté en equilibrio los vectores tangenciales que definen, deben cancelarse. Para ello no pueden apuntar todos hacia abajo o hacia arriba (concavidad o convexidad), sino que en  $p$  debe haber un punto de silla.



Para concretar más lo que entendemos por un parche cuadrado de lado  $\epsilon$  centrado en  $p$ , consideremos dos secciones normales por planos perpendiculares entre sí a través de  $p$ . Los cortes dan lugar localmente a dos curvas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , que suponemos parametrizadas por longitud de arco y con  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ . Considerando los planos perpendiculares a estas

curvas en  $\gamma_1(\pm\epsilon/2)$  y  $\gamma_2(\pm\epsilon/2)$ , se obtiene algo así como un cuadrado curvilíneo, el parche del que hablábamos.



Las tensiones tienen, con aproximación hasta orden uno en  $\epsilon$ , la dirección de los vectores tangentes  $\pm\gamma_1'(\pm\epsilon/2)$ ,  $\pm\gamma_2'(\pm\epsilon/2)$ . Según lo dicho, que la película de jabón esté en equilibrio requiere que se cancelen hasta orden uno cuando  $\epsilon$  es suficientemente pequeño, es decir, que

$$\vec{0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\gamma_1'(\epsilon/2) - \gamma_1'(-\epsilon/2) + \gamma_2'(\epsilon/2) - \gamma_2'(-\epsilon/2)}{\epsilon} = \gamma_1''(0) + \gamma_2''(0) = (\kappa_1 + \kappa_2)\mathbf{n}.$$

Donde se ha usado  $\dot{\mathbf{t}} = \kappa \mathbf{n}$  (fórmula de Frenet [Do]). Así pues la suma de las curvaturas de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  en el punto  $p$  debe ser nula.

Con esto llegamos a un modelo intrínsecamente geométrico.

#### Diccionario:

- Película jabonosa  $\rightarrow$  Superficie tal que en cada punto la suma de las curvaturas de curvas perpendiculares obtenidas por secciones normales es nula.

Físicamente, la tensión superficial en los fluidos está asociada al hecho de que cuesta trabajo estar en la superficie [Va 1], de manera que hay una energía potencial asociada al área, y las leyes de la Estática sugieren que el equilibrio se alcanza en los valores críticos del potencial, en este caso del área. Antes de probarlo matemáticamente, como una concesión a los más olvidadizos, recordaremos algunos de los temas de Geometría II [Do].

Dado un punto  $p$  de una superficie regular  $S \subset \mathbb{R}^3$ , siempre existe una parametrización local  $\mathbf{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$  con  $p \in \text{Im } \mathbf{X} = S \cap \mathcal{V}$ . Los vectores tangentes a  $S$  en  $\mathbf{X}(u, v)$  están generados por  $\mathbf{X}_u(u, v)$  y  $\mathbf{X}_v(u, v)$  (las parciales  $\partial/\partial u$ ,  $\partial/\partial v$ ). El área de una porción

de superficie  $\mathbf{X}(K)$  con  $K \subset \mathbb{R}^2$  (digamos compacto para poder integrar bien) es la integral

$$A = \int \int_{\mathbf{X}(K)} dS = \int \int_K \|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v\| dudv.$$

Desde Gauss se suele denotar  $E = \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_u$ ,  $F = \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_v$ ,  $G = \mathbf{X}_v \cdot \mathbf{X}_v$  (los coeficientes de la primera forma fundamental). De  $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ , se sigue

$$A = \int \int_K \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Si en  $p \in S$  cortamos con secciones normales (planos que contienen al vector normal) una de las curvas obtenidas tendrá curvatura  $k_1$  máxima, y otra curvatura  $k_2$  mínima. Se define la *curvatura media*  $H$  como su semisuma,  $H = (k_1 + k_2)/2$ . Se prueba que estas curvas “máxima” y “mínima” son perpendiculares en  $p$ , y que si tomamos una sección normal que forme un ángulo  $\theta$  con la curva “máxima”, la curva así obtenida tiene en  $p$  curvatura  $k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$  (fórmula de Euler).

La diferencial de la aplicación de Gauss que asigna a cada  $p \in S$  la normal unitaria  $\mathbf{N}$  se puede considerar como una función  $DN : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ , que tendrá cierta matriz  $(a_{ij})$  en la base  $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$  del espacio tangente. Es decir

$$(1.6) \quad \begin{cases} \mathbf{N}_u = a_{11}\mathbf{X}_u + a_{12}\mathbf{X}_v \\ \mathbf{N}_v = a_{21}\mathbf{X}_u + a_{22}\mathbf{X}_v \end{cases}$$

Se prueba que las curvaturas  $k_1$  y  $k_2$  son los autovalores cambiados de signo de  $(a_{ij})$ .

Comencemos viendo que es indiferente suponer que  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son las curvas “máxima” y “mínima”.

**Proposición 1.7.** *La semisuma de las curvaturas en  $p \in S$  de las curvas determinadas por dos secciones normales ortogonales entre sí coincide con la curvatura media.*

DEM.: Si una de las secciones normales forma un ángulo  $\theta$  con la “curva máxima”, la otra forma un ángulo  $\theta + \pi/2$ . La fórmula de Euler asegura que la semisuma de las curvaturas es

$$\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{(k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta) + (k_1 \cos^2(\theta + \pi/2) + k_2 \sin^2(\theta + \pi/2))}{2} = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Donde se ha usado  $\cos^2(\theta + \pi/2) = \sin^2 \theta$  y  $\sin^2(\theta + \pi/2) = \cos^2 \theta$ . ■

Introduciendo esto en el modelo se tiene que *las películas jabonosas corresponden a superficies de curvatura media nula en todo punto*. En Geometría, usando un nombre clásico poco correcto, se llaman *superficies mínimas* a las que tienen esta propiedad. Actualmente se conocen decenas de familias de ellas.

A continuación vamos a transformar la condición de curvatura media nula en algo más analítico que podamos comprobar “a mano” si nos dan la parametrización.

**Lema 1.8.** *La curvatura media se anula si y sólo si*

$$GN_u \cdot \mathbf{X}_u + EN_v \cdot \mathbf{X}_v = F(\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{X}_v + \mathbf{N}_v \cdot \mathbf{X}_u).$$

DEM.: Multiplicando escalarmente la primera ecuación de (1.6) por  $G\mathbf{X}_u$  y  $F\mathbf{X}_v$  y restando los resultados, se obtiene

$$GN_u \cdot \mathbf{X}_u - F\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{X}_v = a_{11}(EG - F^2).$$

De la misma forma, si en la segunda se multiplica por  $E\mathbf{X}_v$  y  $F\mathbf{X}_u$ , y se resta, se llega a

$$EN_v \cdot \mathbf{X}_v - F\mathbf{N}_v \cdot \mathbf{X}_u = a_{22}(EG - F^2).$$

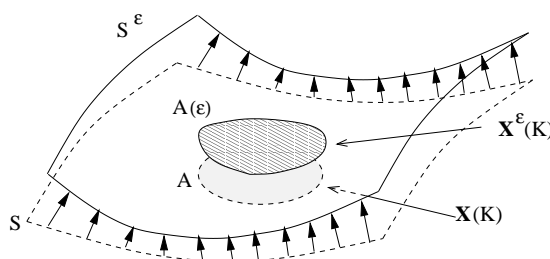
Por Cauchy-Schwarz  $EG > F^2$ , con igualdad estricta porque  $\mathbf{X}_u$  y  $\mathbf{X}_v$  son linealmente independientes. Por tanto la suma de los primeros miembros de las dos ecuaciones anteriores es nula si y sólo si  $a_{11} + a_{22} = 0$ , lo que equivale a  $H = 0$ , ya que la traza es la suma de los autovalores. ■

Ahora veremos que las superficies mínimas tienen área quizá no mínima, pero sí crítica (estacionaria) entre todas las perturbaciones pequeñas de la superficie. Primero vamos a definir lo que entendemos por una perturbación.

Dada una parametrización local de  $S$ ,  $\mathbf{X} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , consideremos

$$\mathbf{X}^\epsilon = \mathbf{X} + \epsilon h\mathbf{N}$$

donde  $\mathbf{N}(u, v)$  es la normal en  $\mathbf{X}(u, v)$  y  $h = h(u, v)$  es una función regular arbitraria.



Cuando  $\epsilon$  es pequeño esto define, quizá en un abierto  $\mathcal{V}$  un poco menor que  $\mathcal{U}$ , una parametrización de una superficie  $S^\epsilon$  obtenida a partir de  $S$  moviendo cada punto un poco a lo largo de la normal. Diremos que  $\mathbf{X}^\epsilon$  define una *variación normal*. Si  $K \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ , designaremos por  $A(\epsilon)$  al área de la porción de superficie  $\mathbf{X}^\epsilon(K)$ . Es decir, en algún sentido



$A(\epsilon)$  es el área en la que se transforma  $A = |\mathbf{X}(K)|$  cuando perturbamos una cantidad comparable a  $\epsilon$  la porción de superficie elegida.

**Teorema 1.9.** *La función  $A(\epsilon)$  alcanza un valor crítico en  $\epsilon = 0$  (para toda  $h$ ) si y sólo si la curvatura media se anula.*

DEM.: Sea una variación normal  $\mathbf{X}^\epsilon$  como antes, parametrizando una superficie  $S^\epsilon$ . Los coeficientes de la primera forma fundamental de  $S^\epsilon$  son

$$\begin{aligned} E^\epsilon &= \mathbf{X}_u^\epsilon \cdot \mathbf{X}_u^\epsilon = \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_u + 2\epsilon h \mathbf{N}_u \cdot \mathbf{X}_u + \epsilon^2 \mathcal{H}_1 = E + 2\epsilon h \mathbf{N}_u \cdot \mathbf{X}_u + \epsilon^2 \mathcal{H}_1 \\ G^\epsilon &= \mathbf{X}_v^\epsilon \cdot \mathbf{X}_v^\epsilon = G + 2\epsilon h \mathbf{N}_v \cdot \mathbf{X}_v + \epsilon^2 \mathcal{H}_2 \\ F^\epsilon &= \mathbf{X}_u^\epsilon \cdot \mathbf{X}_v^\epsilon = F + \epsilon h (\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{X}_v + \mathbf{N}_v \cdot \mathbf{X}_u) + \epsilon^2 \mathcal{H}_3 \end{aligned}$$

Para ciertas funciones  $\mathcal{H}_1$ ,  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_3$ .

Operando se llega a

$$E^\epsilon G^\epsilon - (F^\epsilon)^2 = EG - F^2 + 2\epsilon h \mathcal{H} + \epsilon^2 \mathcal{H}_4,$$

para cierta función  $\mathcal{H}_4$  que no depende de  $\epsilon$  y

$$\mathcal{H} = G\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{X}_u + E\mathbf{N}_v \cdot \mathbf{X}_v - F(\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{X}_v + \mathbf{N}_v \cdot \mathbf{X}_u).$$

Por tanto

$$A(\epsilon) = \int \int_K \sqrt{E^\epsilon G^\epsilon - (F^\epsilon)^2} \, dudv \Rightarrow A'(0) = \int \int_K \frac{h\mathcal{H}}{\sqrt{EG - F^2}} \, dudv.$$

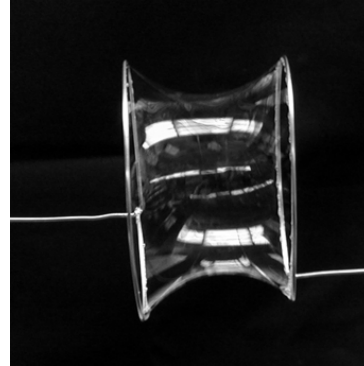
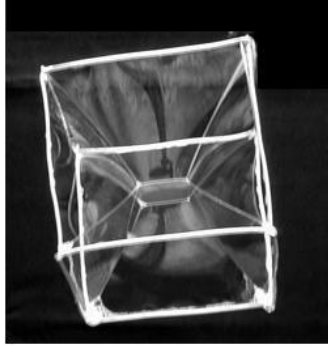
Así pues  $A'(0) = 0$  cuando  $\mathcal{H} = 0$ , y según el lema anterior esto ocurre si y sólo si la curvatura media es nula. Por otra parte, si éste no fuera el caso, tomando  $h = \mathcal{H}$  se tendría  $A'(0) \neq 0$ . ■

Epílogo: No siempre las superficies mínimas son mínimas en realidad, en el sentido de que ninguna otra superficie con la misma frontera tenga menor área, sin embargo es posible probar este resultado para cualquier porción de superficie mínima que se pueda escribir como el grafo de una función definida sobre un convexo [Mo]. Es decir, que en cierto sentido las superficies mínimas son al menos mínimas localmente.

Aquí hemos considerado sólo superficies diferenciables de  $\mathbb{R}^3$  pero uno podría preguntarse si existen contornos “raros” para los que la película de jabón no da lugar a una superficie diferenciable. Éste problema está íntimamente relacionado con el estudio de la regularidad de la solución de ecuaciones en derivadas parciales no lineales (esto es, muy difíciles). Algunos dibujos [Du-Fo-No] p. 401, son suficientes para sospechar que no podemos esperar siquiera la unicidad en el caso general. El problema de lo “buena” que debe

ser la solución de las ecuaciones en derivadas parciales que derivan de buenos problemas del Cálculo de Variaciones fue uno de los famosos problemas que propuso Hilbert en 1900.

Las experiencias con soluciones jabonosas nos muestran que al introducir el armazón de un cubo (el esqueleto determinado por las aristas) la superficie obtenida no es diferenciable sino que tiene algunas aristas.



También se puede comprobar que las superficies que minimizan el área no varían continuamente cuando modificamos el contorno. Por ejemplo, empleando como contorno dos aros idénticos enfrentados (determinando un cilindro recto), según varía la distancia entre ellos la superficie minimizante pueden ser los círculos interiores o un catenoide que los une [Is] p. 79, p. 163.

## Ejercicios

1) Sin mirar la teoría: a) Explicar qué es la tensión superficial. b) Describir brevemente el modelo de las películas de jabón.

2) Al aplicar un movimiento del espacio a una superficie mínima se obtiene una superficie mínima. Explicar esto geoméricamente y en términos de películas jabonosas.

3) Explicar en términos de la tensión superficial, por qué es natural que sea indiferente sumar las curvaturas principales o las de otras dos secciones normales cualesquiera ortogonales.

4) Comprobar que el helicoides parametrizado por  $\mathbf{X}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u)$  es una superficie mínima.

5) Estudiar para qué valores de  $a$ , una película de jabón podría tener la forma de una porción de la superficie  $x^2 + y^2 = a \cosh^2 z$ .

6) Si la superficie descrita por una película de jabón viene dada por  $z = f(x, y)$ , hallar una ecuación en derivadas parciales que deba satisfacer  $f$ .

7) Empleando la parametrización  $\mathbf{X}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, h(v))$  de una superficie de revolución, hallar la ecuación diferencial que debe satisfacer  $h$  para que  $\mathbf{X}$  defina una superficie mínima.

8) Estudiar qué superficies de revolución pueden ser descritas por películas de jabón, resolviendo la ecuación del problema anterior.

9) Probar que  $\mathbf{X}(u, v) = (u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, v - \frac{1}{3}v^3 + vu^2, u^2 - v^2)$  parametriza localmente una superficie mínima.

10) Utilizando el Cálculo de Variaciones, hallar la superficie de revolución  $f(z) = \sqrt{x^2 + y^2}$  con borde las circunferencias  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = \pm a$ , para que el área sea estacionaria. (Aplíquese la fórmula  $A = 2\pi \int f \sqrt{1 + (f')^2}$  de Cálculo I). Probar que si  $a > 1/2$  no hay solución con  $f \in C^2$ .

11) Aproximar con dos cifras decimales el valor de  $R$  a partir del cual una película de jabón con forma de catenoide  $x^2 + y^2 = \lambda^2 \cosh^2(z/\lambda)$  conectando  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $z = \pm 1$ , tiene área menor que la suma de las áreas de los círculos limitados por estas circunferencias.

## Trabajos sugeridos

De la sección:

- Estudio matemático de los fenómenos relacionados con la tensión superficial.

Generales:

- Los eclipses.

### Las palabras del sabio...

*Todas las leyes son, pues, obtenidas de la experiencia, pero para enunciarlas es necesaria una lengua especial; el lenguaje ordinario es demasiado pobre y, por otra parte, demasiado vago para expresar relaciones tan delicadas, tan ricas y tan precisas.*

*He ahí, pues, una primera razón por la cual el físico no puede pasarse sin las matemáticas: le suministran la única lengua que él puede hablar. [Po] p. 95.*